間違いと真理: 解析学と集合論の場合

渕野 昌
◎神戸大学大学院システム情報学研究科

May 19, 2019
(21:00 JST) 版

目 次

1. ライプニッツは間違っていたのか?

数学とは間違わずに計算する術のことだ，と思っている人が結構いるようです．多くの人にとって数学は「試験で通らなければならない科目」でしかないので，間違わずになんだか分らない計算をして良い点をとる悪夢，というのが，そのような人たちにとっての数学なのかもしれません．しかし，これを「間違わずに精巧な証明を生成する術」と言い換えたらどうでしょう？ 結構多くのプロフェッショナルな数学者が，この「数学の特徴づけ」に同意してしまうのではないでしょうか.

たしかに，ある数学理論の安定した枠組が既に確立されているとき (あるいは，確立されていると誤認されたとき)，その中での数学の発展のための作業原理は「間違わずに精巧な証明を生成」することに限りなく近いものになることも多いのではないかと思います．ちなみに，この「精巧な証明を生成」するところのプロフェッショナルな数学者たちの間では，お互いの格の違いを問題にしなくてはならなくなることがあるので，そのような不幸な状況か

---

[*] このテキストは，数学セミナー 2018 年 9 月号に掲載された，同じタイトルの解説の拡張版です．数学セミナーでは省略した多くの細部や，命題や，証明が書き加えてあります．このテキストの最新版は
http://fuchino.ddo.jp/article/susemi2018-x.pdf から download できます.

[†] 1970 年代の終りに，以下でも引用している [齋藤 1976] を，(故) 廣瀬健先生の研究室のセミナーで読んだという高田正之氏から，本稿の原稿に関して，多くの有益なご指摘をいただきました．ここに感謝の意を表します.

[0] May 19, 2019 (21:00 JST) 版

ら，この「精巧」さのしのぎあいが微妙な意味合いを持つものになることもありえます．

しかし，数学の歴史を見渡してみると，paradigm shift とか quantum leap などという言葉でしかよべないような大きな変革の前後では，何が正しいのかが一見して判断できないような状況が生れていて，一部の例外的な数学力を持った人達だけが，その状況での研究の最先端で，後で整理してみると正しいことが厳密に説明できるようになる種類の結論を導いてゆく，というパターンが見られることがあります．そのようなとき，最先端で仕事をしている人には何が正しいかについての確固とした直観があって，後から見て大きな間違いと判定できるようなミスをすることはほとんどないとしても，研究の前線で何が起っているかを見定めるだけの力のない人には，正しい議論と間違った議論がほとんど区別できない，というような混沌とした状況になってしまうことも少なくありません．このような状況下では，正しい／間違っている，というような脳天気な二分律が意味を失なってしまうことすらあり得ます．

近代になってからの数学の歴史でも，何が本当に正しいのかが判然としないような枠組で，何世紀にもわたって，数学理論の研究が進展してゆくという流れが一度ならず起っています．

17 世紀，18 世紀における解析学 (「微分積分学」というような題で大学で講義される科目の内容を含む数学分野) は，そのような状況の典型的なものの一つ，と言うことができるでしょう．

例えば，ライプニッツの (1670 年代くらいの頃の) “微分係数” の理解は，変量 x を無限小量[1] dx だけ変化させたときの，x の関数 (ライプニッツの理解では x の式として書ける変量) であるところの y の変化としての無限小量を dy とするとき，それらの比 $\frac{dy}{dx}$ のことである，というようなものだったと思われますが[2]，ライプニッツ以降，一世紀以上の間，この「無限小」が数学的に厳密化されることはなく，その直観的な理解だけに頼って解析学が発展してゆくことになります．このような展開を可能にしたのは，ひとつには，解析学の物理での応用の華々しい成功がその裏にあって，解析学が，当時の「理論物理学」という “実験科学” として発展し得たことで，厳密化を先送りすることができたのだろうと思うのです

---

[1] ここでは「無限小」あるいは「無限小量」という用語は，“infinitesimal” の訳語として使っています．「無限小」が単数的なのに対し「無限小量」は色々な「無限小の量」があり得るというような，複数的なニュアンスを持った用語になっています．ライプニッツのオリジナルの infinitesimal は，定冠詞つきの単数のようですが，後で述べる，無限小の現代的な解釈ではむしろ「無限小量」に近い複数的な内容を持つものになります．

[2] ライプニッツの微分積分学については，[上野 2016] やそこで揚げられている文献等を参照してください．無限小については [Bell 2017] が参考になります．

が．本稿の主旨は数学史についての議論ではないので，そのあたりのもっと詳しい議論は他の機会に譲りたいと思います．

無限小による “証明” は，19 世紀初頭くらいに，現在の極限の厳密な議論で置き換えられるようになり，コーシーを経て，ボルツァーノ，ヴァイアシュトラスといった数学者たちによって，極限の数学的扱いの厳密化がなされることになりました．なお，解析学で厳密な定義が先送りされたのは，この「無限小」の問題だけだったわけではなく，関数の概念についても，現代の意味での関数の概念が確立されるまでには，1920 年代になるのを待たなくてはなりませんでした[3]．解析学で扱われることになる関数は，多くの場合，実数直線 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}$ の直積として得られる n-次元空間 $\mathbb{R}^n$ のある領域に属す点に，ある実数を対応させるというような種類のものなわけですが，この “実数” がそもそも何なのかが厳密に規定できるようになるのも，19 世紀末のデデキントやカントルによる仕事以降のことです[4]．

このような歴史的な発展を経た後では，無限小の概念は，解析学の誕生の際のエピソードにすぎず，教育的に，「無限小」に言及することがあれば，それは，極限の厳密な扱いについて来られるだけの能力のない人のための，poor man’s math にすぎない，というような位置付けがなされることになって現在に至っている，というように理解されることも多いかもしれません．

この見方で言うと，「ライプニッツの解析学の基礎付けは間違っていた」ということになって，この「間違いから発展した数学」という企画にドンピシャリな記事が書けてしまうことになり，私は，あと数ページかけて結末を書けばいいことになるはずですが，真実はそんな『数セミ』記事の筆者の目論見より奇なり．

というのは，1960 年代の初めに，アブラハム・ロビンソン (Abraham Robinson, 1918–1974) が，20 世紀の前半に得られた数理論理学での研究成果を用いると，ライプニッツの無限小の，厳密な数学的定式化が可能になることを示しているからです．ロビンソンは，彼の手法を Non-standard Analysis とよびましたが，これは，齋藤正彦先生によって「超準解析」と日本語訳されています [齋藤 1976]．次の節で，この超準解析の「さわり」について少し話し

---

[3] ツェルメロの 1907 年の論文には，既に関数を特別な形をした集合と見ることによって関数に関するオントロジーに答を与える，というアイデアの祖型が見られますが，このアイデアを確定的に定式化するためには，順序対をどう扱かうかを指定する必要があり，これをどう処理すべきかが明示的に示されるのは，クラトフキーの 1920 年代の論文においてでした．

[4] ここで「規定できるようになる」という歯切れの悪い表現をしているのは，どの理論的枠組み (で展開される実数論) を実際には解析学の基礎として採用すべきか，という問題がまだ残っているからです．これについては第 2 節の初めの部分も参照してください．

てみようと思います．

以下では，話の流れは予備知識なしでも追えるよう工夫していますが，数学的な内容を自分で完全に再構成できるためには，数理論理学の初歩的な知識は必要になります．これは，例えば，[渕野 2013] や [菊池 2014] の最初のいくつかの章などで補えます[5)]．集合論の初歩的な知識については，例えば [渕野 2007] が参考になると思います．

2. 初等埋め込みと超準解析

解析学を含むすべての数学は，選択公理 (Axiom of Choice) を伴うツェルメロ=フレンケル集合論 (ZFC) の中で展開できます．もちろんこれには例外もあって，その一つは本稿の後半で述べることになる，巨大基数の存在を仮定する集合論ですが，古典的な (つまり 20 世紀中盤くらいまでの) 解析学はすべて ZFC の中に余裕で展開できると断言できます．「断言できます」というのは，このことをチェックしたと言えるためには，20 世紀中盤までの解析学の文献に全部目を通さなくてはならないので，そんなことはもちろんやらないし，やってもしょうがないが，というような含みで言っているわけですが．

実際のところ，通常の解析学を行なうには，ZFC のフルパワーは必要ではありません．解析学 (の大きな部分) を含む数学が展開できるような集合論のできるだけ弱い部分体系で，座りのよいものを見つける，という試みはさまざまな角度からなされていて，そのような研究からは，通常の解析学の行える枠組として，ZFC に比べて非常に弱い体系がとれることが色々と分ってきています．もちろんこの “通常の” という形容の解釈の幅は大きいので，その解釈に伴って色々な結果のバリエーションが出てくることになります[6)] [7)]．これらは，もちろん重要な研究ですが，ここでは，この話題に触れる余裕はないので，以下ではもっとずっとどんぶり勘定な話をすることにします:

ZFC では，集合の全体は，フォン・ノイマン階層とよばれる階層に分類される[8)]．

---

5) 私の講義録 [渕野 ω_0], [渕野 ω_1] (現在のところどちらも未完な部分を含んでいます) も参考になるかもしれません．

6) 「逆数学」(Reverse Mathematics) と呼ばれる研究分野で，そのような体系 (複数) に関する研究がなされています．

7) もちろん，集合論の研究者の研究する数学では，ZFC の公理系がフルパワーで用いられますが，それだけでなく，集合論の通常の公理系を更に拡張する様々な公理系での数学の間を超数学の視点を介在として自由に行き来しながら研究する，という最近 set-theoretic multiverse (集合論的多世界宇宙) とよばれるようになってきている視座が日常的に必要にさえなります．

8) “ZFC では” と書いたが，実はフォン・ノイマン階層の導入には選択公理は必要ない．これに対し，フレンケルによる置換公理は，フォン・ノイマン階層の導入に不可欠である．この公理がないと，以下の定義での，極

超限順序数 α に対し，$\alpha = 0$ なら $V_0 = \emptyset$, V_α が定まったときに $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$ とし，γ が極限順序数で，すべての $\alpha < \gamma$ に対して V_α が定まったときには， $V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$, として V_α を再帰的に定義する．$V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ は[9] クラスの長さを持つ，集合の上昇列で，極限順序数のところでは，それまでのものの和集合になっているという意味での連続性を持つものとなっているが，ZFC の公理のうちの基礎の公理 (正則性の公理と呼ばれることもある) により，集合の全体のクラスは $V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ の和と一致する[10]．今，解析学で現れる数学的対象たちがこの階層のどこで現れるかを考えてみると，$\mathbb{N}$ は集合としては最初の無限順序数 ω と同一なので，V_ω の (述語論理の論理式で定義できる) 部分集合になっており，一つ一つの実数は自然数の集合でコードできるので，$V_{\omega+1}$ の要素となっており，したがって $\mathbb{R}$ は集合として $V_{\omega+2}$ の要素になっていると見ることができる．解析学に関連した話題の大概のものはこのくらいのレベルで話が収まるはずだが，もう少し近代的な話では，例えば，ボレル決定性の定理のために，すべての可算順序数 α に対する V_α が必要になってくる，ということがあるので，これも「解析学 (の大きな部分)」に含めることにして，V_{ω_1} を考えることにしてみる[11]．

集合の間の要素関係 $\in$ を[12] V_{ω_1} に制限して得られる関係も同じ $\in$ で表わすことにして，構造 $\mathcal{U} = \langle V_{\omega_1}, \in \rangle$ を考えると，上で述べたように通常の解析学の議論に現れる数学的対象や関数や関係は[13]，すべて $\mathcal{U}$ の要素になると考えてよいが，それだけではなく，それらの数学的対象は，$\mathcal{U}$ の中で述語論理の論理式によって定義できる．$\mathcal{L}_\varepsilon$ を ZFC の言語 (2 変数関係記号 ε のみを持つ言語) として[14]，$\mathcal{U}$ の関係 $\in$ を ε の解釈と考えて，$\mathcal{U}$ を $\mathcal{L}_\varepsilon$-構造と捉

限順序数 γ での V_γ の存在が保証できなくなってしまうからである．

[9] On で順序数 (超限順序数を含む) の全体を表わす．

[10] すべての集合からなるクラスは V と表わされることが多いので，ここでの主張は $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ と書ける．

[11] ω_1 で，最初の非可算な順序数を表わす．

$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\mathrm{On} \cap V_\alpha = \alpha$ $(= \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\})$ となることが， α に関する帰納法で示せる．したがって，特に，V_{ω_1} では，可算順序数を必要とするような議論も展開することができる．

[12] 集合論では，すべての数学的対象は集合であると仮定して議論をするので，集合の要素も (数や関数などの通常の数学的対象も含めて) すべて集合である．

[13] 集合論の視点からは，(集合上の) 関数や関係は特定の形をした集合にすぎないことに注意する．個別の数学の議論をしているときには，定冠詞つきの，“あの” 関数や “この” 関係を集合と見る見方が不自然に思えることもあるようだが (最近，Wikipedia にも名前のあがっているある数学者からそのような意見を聞く機会が実際にあった)，関数や関係を集合とは別の対象とみなす枠組を考えることにすると，関数や関係に対する，集合とは別途のオントロジーが必要になることとなり，その基礎付けのための根拠が与えにくい状況が生じてしまうことを指摘しておきたい．

[14] 記号としての等号 ‘$\equiv$’ は論理体系に含まれているものとする．

えることにすると，例えば，“x は 0 である” は[15]，x が $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\forall y\,(\neg\, y\;\varepsilon\; x)$ を $\mathcal{U}$ で満たすこととして表現できる．つまり，この論理式を $\varphi(x)$ とすると，$a \in V_{\omega_1}$ が $a = \emptyset$ であることと，$\mathcal{U} \models \varphi(a)$ となることは同値である[16]．同様に，もう少し複雑な論理式にはなるが “x は自然数の全体からなる集合である” や，実数の導入のスタンダードなやり方を一つ固定したときのその導入法に関しての “x は実数の全体からなる集合である”, “x, y は実数で $x < y$ である” 等々，はすべて，記述の対象となっている集合が，V_{ω_1} で，対応する (述語論理の) $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式を満たすこと，として表現できる．このことから，解析学の研究は，そこでの数学的命題 A に対応する $\mathcal{L}_\varepsilon$-文[17] φ_A が構造 $\mathcal{U}$ で成り立つことを証明することである，と言い換えることができることになる．

以上では，論理式と言ったときには，集合論の外の，我々が実際に紙の上に書きだすことのできる (あるいは実際には物理的には長すぎて書きだせないが物理的な制限を無視すると書き出せると想像できる) 記号列としてのそれ (つまり，超数学での論理式) だったのですが，完全性定理の証明でのように集合論の内部で論理式を考えることもできます．以下ではそのような意味での論理式について議論しています．

V_{ω_1} の各々の要素 a に対し，新しい定数記号 $\underset{\sqcup}{c}_a$ を用意する．これらの記号は，異る a, $a' \in V_{\omega_1}$ に対しては $\underset{\sqcup}{c}_a$ と $\underset{\sqcup}{c}_{a'}$ は異るように選ばれているとする．$\mathcal{L}_\varepsilon$ にこれらの記号を加えて得られる言語を $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ と表わす．これらの新しい定数記号 $\underset{\sqcup}{c}_a$ ($a \in V_{\omega_1}$) のそれぞれを a のこととする，という自然な解釈で $\mathcal{U}$ を拡張して得られる $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-構造を，$\tilde{\mathcal{U}}$ とよぶことにする．ここで，$\tilde{T} = \{\varphi : \varphi$ は $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-文で $\tilde{\mathcal{U}} \models \varphi\}$ とする．つまり $\tilde{T}$ は 構造 $\tilde{\mathcal{U}}$ の “理論” である．

変数記号 x のみを自由変数として持つ $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-論理式の集合 p が $\tilde{T}$ 上の可算タイプである，とは，p は可算集合で，p の任意の有限部分集合 p' に対し，$a \in V_{\omega_1}$ がとれて，$\{\varphi(\underset{\sqcup}{c}_a) : \varphi \in p'\} \subseteq \tilde{T}$ となるようにできること，とする[18]．各々の $\tilde{T}$ 上の可算タイプ p に対し，新しい定数記号

---

[15] 通常，集合論では，数 0 は空集合 $\emptyset$ のこととして導入され，数 $n+1$ は $n \cup \{n\}$ のこととして帰納的に定義される．

[16] 構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $\mathfrak{A}$ の言語での論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と A の要素 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ で，“φ の変数 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ にそれぞれ $a_0, \ldots, a_{n-1}$ を代入したものが構造 $\mathfrak{A}$ で成り立つ” ことを表わす．論理式 φ が “構造 $\mathfrak{A}$ で成り立つ” とは，φ に現れる量化子 $\forall x$, $\exists x$ をそれぞれ，すべての A の要素 x に対し，... ある A の要素 x が存在して，... と解釈して，φ に現れる論理演算子はそれぞれ，意図される意味に解釈したときに成り立つ，ということである．このことの厳密な定義は，論理式の構成に関する帰納法によって，関係 “$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$” を導入することで行なうことができる．

[17] 自由変数を含まない論理式を文とよぶ．

[18] ここでは，$\varphi(\underset{\sqcup}{c}_a)$ は，$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-論理式 φ に現れる自由変数 x を $\underset{\sqcup}{c}_a$ で置き換えて得られる $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-論理式のことであ

$\underset{\sqcup}{d}_p$ を導入して，これらの新しい記号を $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ に付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}^*$ とする．

$T^* = \tilde{T} \cup \{\varphi(\underset{\sqcup}{d}_p) : p$ は $\tilde{T}$ 上の可算タイプで $\varphi \in p\}$ とすると，可算タイプの定義から，T^* は無矛盾な $\mathcal{L}^*$-理論になる．したがって，完全性定理により，T^* はモデル $\mathcal{U}^* = \langle U^*, E^*, ...\rangle$ を持つ[19]．ここに E^* は関係記号 ε の $\mathcal{U}^*$ での解釈である．$\mathcal{U}^*$ での $\mathcal{L}^*$ に含まれる定数記号の解釈をすべて忘れることで，$\mathcal{L}_\varepsilon$-構造 $\langle U^*, E^*\rangle$ が得られるが，簡単のためにこの $\mathcal{L}_\varepsilon$-構造も $\mathcal{U}^*$ とよぶことにする．各 $a \in V_{\omega_1}$ を $\underset{\sqcup}{c}_a$ の $\mathcal{U}^*$ での解釈に対応させることで，$\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}^*$ に埋め込むことができる．一般性を失なうことなく，$\underset{\sqcup}{c}_a, a \in V_{\omega_1}$ の $\mathcal{U}^*$ での解釈は a 自身になっていて (つまりこの埋め込みは恒等写像になっていて) V_{ω_1} 上では E^* と $\in$ は一致するとしてよい．この同一視による $\mathcal{U}$ の $\mathcal{U}^*$ への埋め込みは，T^* の定義から，(述語論理の) 論理式で記述できる性質をすべて保存する[20]．つまり，すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in V_{\omega_1}$ に対し，$\mathcal{U} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つ．

$\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ で，$\mathcal{U} \models$“$\mathbb{N}$ は自然数の全体からなる集合である” である．$\mathcal{U}$ が $\mathcal{U}^*$ の初等部分構造であることから，
$\mathcal{U}^* \models$“$\mathbb{N}$ は自然数の全体からなる集合である” でもある．一方，$\mathbb{N}^* = \{a \in U^* : \mathcal{U}^* \models$“$a \;\varepsilon\; \mathbb{N}$”$\} = \{a \in U^* : a\; E^*\; \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{N}$ を真に拡張する集合になっている: $\tilde{T}$ 上の可算タイプ p を，論理式 “x は自然数である”, “$\underset{\sqcup}{c}_0 < x$ ”, “$\underset{\sqcup}{c}_1 < x$”,“$\underset{\sqcup}{c}_2 < x$”,... からなるものとするとき[21]，$\underset{\sqcup}{d}_p$ の $\mathcal{U}^*$ での解釈を m^* とすると，$\mathcal{U}^* \models$“$m^* \;\varepsilon\; \mathbb{N}$” だが，$m^*$ はすべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ より大きな数だから，$m^* \notin \mathbb{N}$ である．

$\mathcal{U}^*$ での m^* の逆数 d^* に対し，$\mathcal{U}^* \models$“$d^* \;\varepsilon\; \mathbb{Q} \;\wedge\; 0 < d^*$ ” で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，$\mathcal{U}^* \models$“$d^* < \frac{1}{n}$ ” である．

$\mathbb{R}^* = \{a \in U^* : \mathcal{U}^* \models$“$a \;\varepsilon\; \mathbb{R}$”$\}$ とする．$\mathbb{R}^*$ では，上の d^* のように，$\varepsilon^* \in \mathbb{R}^*$ で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，$\mathcal{U}^* \models$“$|\varepsilon^*| < \frac{1}{n}$ ” を満たすものを持つものが，0 以外にも存在する．このような “実数” のことを無限小とよぶことにする．

<u>ライプニッツの無限小は，ここで導入したような無限小のことだと解釈することができる，</u>

る．通常，タイプを考えるときには，1 変数のもの (x のみを自由変数として含む論理式の集合としてのタイプ) だけではなく，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対する n-変数のタイプも考える必要はあるが，ここでは，$\mathcal{U}$ が対の公理を満たすことから，1 変数のタイプのみを考察すれば十分である．

[19] $\mathcal{U}^*$ が T^* のモデルであるとは，すべての $\varphi \in T^*$ に対し，$\mathcal{U}^* \models \varphi$ が成り立つことである．

[20] このような埋め込みのことを初等埋め込みとよぶ．特に $\mathcal{U}$ の $\mathcal{U}^*$ への埋め込みは恒等写像なので，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}^*$ の初等部分構造とよばれるものになっている．$\mathcal{U}^*$ は $\mathcal{U}$ の初等拡大である，という言い方もする (また，この状況を $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{U}^*$ と表わす)．

[21] $\underset{\sqcup}{c}_n$ はそれぞれの $n \in V_{\omega_1}$ をその $\tilde{\mathcal{U}}$ での解釈とする定数記号である．

というのがロビンソンの主張していることです．例えば，次のような命題が成り立つことが容易に確かめられます:

$x, y \in \mathbb{R}^*$ で $x - y$ が無限小か 0 のとき，$x \approx y$ と書くことにする． $x \in \mathbb{R}^*$ に対し，$y \in \mathbb{R}$ で $x \approx y$ となるものが存在するときには，このような $y \in \mathbb{R}$ は一意に決まるが，これを x の標準部分とよび，$st(x)$ とあらわすことにする．

定理 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とするとき [22]，f が $a \in \mathbb{R}$ で連続となるのは，任意の無限小 $\delta^* \in \mathbb{R}^*$ に対し，$f(a) \approx f(a + \delta^*)$ が成り立つときである [23]．

証明. まず f が a で連続としてみる．$\delta^* \in \mathbb{R}^*$ を任意の無限小とする．f の a での連続性から，$\mathcal{U}$ で，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で，すべての $d \in \mathbb{R}$ で $|d| < \delta$ となるものに対し，$|f(a + \delta) - f(a)| < \varepsilon$ となる，ようなものがとれる．ε と δ のこの性質は，初等性 (つまり，$\mathcal{U}^*$ が $\mathcal{U}$ の初等拡大であること) から $\mathcal{U}^*$ でも成り立つ．$\mathcal{U}^*$ で，$|\delta^*| < \delta$ だから，$|f(a + \delta^*) - f(a)| < \varepsilon$ である．ε は任意だったから，$|f(a + \delta^*) - f(a)|$ は無限小である．つまり $f(a + \delta^*) \approx f(a)$ が成り立つことがわかる．

逆に f が a で連続でないとすると，$\mathcal{U}$ で，ある $\varepsilon > 0$ に対し，どんな $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ をとっても，$d \in \mathbb{R}$ で $0 < |d| < \frac{1}{n}$ だが，$|f(a + d) - f(a)| > \varepsilon$ となるものがとれる．したがって，$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$-論理式 “$x \mathrel{\varepsilon} \mathbb{R}$”, “$0 < |x| < \frac{1}{n}$”, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, “$|f(a + x) - f(a)| > \varepsilon$” からなる集合 p は $\tilde{T}$ 上の可算タイプとなる．δ^* を $\underset{\sqcup}{d}_p$ の解釈となる (つまり p を満たす) ような $\mathbb{R}^*$ の要素とすると，δ^* は無限小だが，$|f(a + \delta^*) - f(a)| > \varepsilon$ だから $f(a + \delta^*) \not\approx f(a)$ である． ❏

定理 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とするとき [22]，f が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能で微分係数が $d \in \mathbb{R}$ となることは，任意の無限小 $\delta \in \mathbb{R}^*$ に対し，$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \approx d$ となることと同値である．特に f が a で微分可能なことがわかっているときには，任意の無限小 $\delta \in \mathbb{R}^*$ に対し，$f'(a) = st\left(\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}\right)$ である．

証明. f が a で微分可能で，$f'(a) = d$ なら，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で，任意の $h \in \mathbb{R}$ で $h \neq 0, |h| < \delta$ となるものに対し，$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d\right| < \varepsilon$ となるようなものが存在する．δ^* を無限小とすると，任意の $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ に対し，$|\delta^*| < \delta$ だから，任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ に対し，$\left|\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*} - d\right| < \varepsilon$ である．つまり，$\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*} \approx d$ が成り立つ．

❏

---

22) 特に，$f \in V_{\omega_1}$ であることに注意．

23) $f(a + \delta^*)$ は，$b \in U^*$ で，$\mathcal{U}^* \models$ “$b \equiv f(a + \delta^*)$” となるようなもののことである．$f(a + \delta^*) \in \mathbb{R}^*$ であることに注意する．

本節のここから後の部分は，数学セミナー掲載のヴァージョンには含まれていません．特に，以下の定理 5 と定理 6 の証明は，次の節で議論している超準解析の道具（instrument）としての重要性の可能性を示唆する良い例となっているので，これは数学セミナー用のヴァージョンにも含めたかったのですが，紙数の制限で泣く泣く割愛したものです．

$a \in \mathbb{R}^*$ が有界である，とは，a が標準部分を持つこと，つまり，ある $r \in \mathbb{R}$ に対し，$a \approx r$ となること，とする．

補題 3. (1) $a \in \mathbb{R}^*$ が有界であることは，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $|a| < n$ となることと同値である．

(2) $\delta^* \in \mathbb{R}^*$ を無限小または 0 として，$a \in \mathbb{R}^*$ を有界な実数とするとき，$a\delta^*$ も無限小または 0 である．したがって，$a \in \mathbb{R}^*$ が有界な実数で，$b \approx c$ なら，$ab \approx ac$ である．

(3) δ^*, δ^{**} が無限小または 0 なら，$\delta^* + \delta^{**}$ も無限小または 0 である．したがって，$a \approx a'$, $b \approx b'$ なら，$a + b \approx a' + b'$ である．

(4) $\approx$ は $\mathbb{R}^*$ 上の同値関係である．

(5) 有界な $\mathbb{R}^*$ の要素の全体は，加法，減法，乗法に関して閉じている．また，有界な $\mathbb{R}^*$ の要素の全体は，$\not\approx 0$ となる $\mathbb{R}^*$ の要素で割ることに関しても閉じている．

証明. (1): $a \in \mathbb{R}^*$ が有界なら，$r \in \mathbb{R}$ で，$a \approx r$ となるものが存在する．$n \in \mathbb{N}$ を $|r| < n$ となるものとすると，$|a| < n$ である (もしそうでなければ，$|a - r| \geq n - |r|$ となってしまい，$|a - r|$ が無限小または 0 であることに矛盾する)．逆に $|a| < n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在すれば，$A = \{r \in \mathbb{R} : r \leq a\}$, $B = \{r \in \mathbb{R} : r \geq a\}$ として，$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ となり，(A, B) は $\mathbb{R}$ の切断となるので，$A \leq r \leq B$ となる $r \in \mathbb{R}$ が一意に存在するが，(A, B) が切断であることから，$r \approx a$ である．

(2): (1) より，$|a| < m$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する．δ^* が無限小または 0 であることから，任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し $|\delta^*| < \frac{1}{mn}$ となるから，$|a\delta^*| = |a||\delta^*| < \frac{1}{mn} \cdot m = \frac{1}{n}$ である．$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ は任意だから，$a\delta^*$ は無限小である．

(3): δ^* と δ^{**} が無限小なら，任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，$|\delta^*|, |\delta^{**}| < \frac{1}{2n}$ である．したがって，$|\delta^* + \delta^{**}| \leq |\delta^*| + |\delta^{**}| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$ である．$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ は任意だったから，$\delta^* + \delta^{**}$ は無限小である．

(4): 任意の $a \in \mathbb{R}^*$ に対し，$a \approx a$ となることは $\approx$ の定義から明らかである．$a, b \in \mathbb{R}^*$ に対し，(2) により，$a - b$ が無限小なら，$b - a$ も無限小となるから，$a \approx b$ なら $b \approx a$ である．$a, b, c \in \mathbb{R}^*$ に対し，$a - b$ と $b - c$ が無限小なら，(3) により，$a - c = (a - b) + (b - c)$

も無限小である．したがって，$a \approx b, b \approx c$ なら，$a \approx c$ である．

(5): $a, b \in \mathbb{R}^*$ を有界として $c, d \in \mathbb{R}$ と無限小か 0 であるところの，δ^*, δ^{**} を，$a = c + \delta^*$, $b = d + \delta^{**}$ とする．このとき，(2) と (3) により，$a \pm b \approx c \pm d$ である ($c \pm d \in \mathbb{R}$ に注意)．$ab = cd + (a\delta^{**} + \delta^* b + \delta^*\delta^{**})$ だが，(2), (3) により， $a\delta^{**} + \delta^* b + \delta^*\delta^{**}$ は無限小または 0 だから，$ab \approx cd$ である (ここでも $cd \in \mathbb{R}$ に注意する)．$r \in \mathbb{R}^*, r \neq 0$ とする．r が有界でなければ，$\frac{1}{r}$ は無限小になるから，(2) により，$\frac{a}{r}$ は無限小となり，特に有界である ($\frac{a}{r} \approx 0$)．そうでなければ，$\frac{1}{r}$ は有界だから，上から $\frac{a}{r} = \frac{1}{r} \cdot a$ も有界である． ❏

定理 4. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能であることは，任意の無限小 $\delta \in \mathbb{R}^*$ に対し，無限小または 0 であるところの δ^* で，(†) $f(a + \delta) = f(a) + f'(a)\delta + \delta\delta^*$ となるものが存在する，ことと同値である．

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能なら，f は a で連続である．

証明. (1): 直接証明も容易にできるが (演習)，ここでは既に証明した定理 2 を経由して示すことにする．f が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能とすると，定理 2 により，任意の無限小 δ に対し，(‡) $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \approx f'(a)$ だから，$\delta^* = \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} - f'(a)$ は無限小または 0 となる．この等式の両辺を δ 倍して移項すると，等式 (†) が得られる．

逆に (†) が無限小 δ と無限小または 0 であるところの δ^* に対して成り立てば，両辺を δ で割って ($\delta \neq 0$ である!) 移項することで (‡) が得られる．

(2): δ を任意の無限小とするとき，(1) により，ある無限小または 0 であるところの δ^* により，$f(a + \delta) = f(a) + f'(a)\delta + \delta\delta^* = f(a) + (f'(a) + \delta^*)\delta$ とできるが，補題 3 により，$(f'(a) + \delta^*)\delta$ は無限小または 0 だから，$f(a + \delta) \approx f(a)$ である．δ は任意だったから，定理 1 により，f は a で連続であることがわかる． ❏

以上の用意をすると，ε-δ-論法では，きちんと書くのがそれほど簡単でない微分に関する証明の多くが，非常に簡単に[24] 得られるようになります．以下はそのような例になっています:

定理 5. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $a \in \mathbb{R}$ で微分可能な関数とするとき，fg も a で微分可能で，$(fg)'(a) = f'(a)g(a) = f(a)g'(a)$ が成り立つ．

[24] 少なくとも私は以下の定理の ε-δ-論法での証明は，講義前に証明を一度書き出してみておかないと講義中につっかえてしまう可能性があります．これに対し，以下の証明なら，準備なしで再現できる自信があります (実際これを書くにあたってつっかえずに，じかに LaTeX で直接版組みできています．)

証明. δ を任意の無限小とする．このとき，定理 4,(1) により，$f(a+\delta)=f(a)+f'(a)\delta+\delta\delta^*$, $g(a+\delta)=g(a)+g'(a)\delta+\delta\delta^{**}$ となる無限小か 0 であるところの δ^*, δ^{**} がとれる．ここで，

$$\frac{f(a+\delta)g(a+\delta)-f(a)g(a)}{\delta}=\frac{(f(a)+f'(a)\delta+\delta\delta^*)(g(a)+g'(a)\delta+\delta\delta^{**})-f(a)g(a)}{\delta}$$

$$=\frac{\delta f'(a)g(a)+\delta f(a)g'(a)+\delta\delta(f'(a)g'(a)+\delta^*\delta^{**})+\delta\delta^*(g(a)+g'(a)\delta)+\delta\delta^{**}(f(a)+\delta f'(a))}{\delta}$$

$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)+\Big(\delta(f'(a)g'(a)+\delta^*\delta^{**})+\delta^*(g(a)+g'(a)\delta)+\delta^{**}(f(a)+\delta f'(a))\Big)$$

となるが，最後の右辺の和のうちの 3 項目は補題 3, (2), (3) により無限小または 0 である．したがって，$\dfrac{f(a+\delta)g(a+\delta)-f(a)g(a)}{\delta}\approx f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ である．

δ は任意だったから，定理 2 により，$f'(a)$ が存在して $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ であることがわかる． ❑

定理 6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $a\in\mathbb{R}$ で微分可能で，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $f(a)$ で微分可能とするとき，合成関数 $g\circ f$ は a で微分可能で，$(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$ が成り立つ．

証明. δ を任意の無限小とする．このとき定理 4,(1) により，無限小または 0 であるところの δ^* で，$f(a+\delta)=f(a)+f'(a)\delta+\delta\delta^*=f(a)+\delta(f'(a)+\delta^*)$ となるものがとれる．

$$\frac{g(f(a+\delta))-g(f(a))}{\delta}=\frac{g(f(a)+\delta(f'(a)+\delta^*))-g(f(a))}{\delta}\quad\cdots\cdots(\oplus)$$

である．補題 3, (2) により，$\delta(f'(a)+\delta^*)$ は無限小または 0 だから，定理 4,(1) により，ある無限小または 0 であるところの δ^{**} で，$g(f(a)+\delta(f'(a)+\delta^*))=g(f(a))+g'(f(a))(\delta(f'(a)+\delta^*))+\delta(f'(a)+\delta^*)\delta^{**}$ となるものがとれる．この式を $(\oplus)$ に代入すると，

$(\oplus)=g'(f(a))f'(a)+\Big(\delta^*+(f'(a)+\delta^*)\delta^{**}\Big)$ となるが，補題 3, (2), (3) により，この式の最後の $\Big(\cdots\Big)$ は無限小または 0 である．

δ は任意だったから，定理 2 により，$g\circ f$ は a で微分可能で $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$ である． ❑

上の定理 5，定理 6 の脚注では，私自身「ε-δ-論法での証明は，講義前に証明を一度書き出してみておかないと講義中につっかえてしまう可能性」がある，と書きましたが，次の定理では，ε-δ-論法での証明は，うまく自分で再現できず参考書を見なくてはならなくなる危険すらあります．

定理 7. D を $\mathbb{R}^2$ の領域[25] として，$\langle u,v\rangle\in D$ とする．関数 $f:D\to\mathbb{R}$ について，$f_x(u,v)$ と $f_y(u,v)$ が存在し，f_x, f_y のうちの少なくとも片方が $\langle u,v\rangle$ のある近傍 $U\subseteq D$ で定義され

[25] ここでは簡単のために，領域とは，連結な開集合 $\subseteq\mathbb{R}^2$ のこととする．この定義から，任意の $\mathbb{p}\in D$ に対し，$\mathbb{d}\in(\mathbb{R}^*)^2$ を無限小 (後出) とすると，$\mathcal{U}^*\models$“$\mathbb{p}+\mathbb{d}\,\varepsilon\,D$” が成り立つ．

ていて，そこで連続であるとする．$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能で，$\varphi(a) = u$, $\psi(a) = v$ のとき，$f(\varphi(t), \psi(t))$ は a で微分可能で，

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))\bigg|_{t=a} = \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a)) + \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$$

が成り立つ．

証明． 例えば，f_y がある $\langle u, v\rangle$ の近傍 $U \subseteq D$ で定義されていて，そこで連続であるとする (f_x がこの条件を満たすときも証明は同様にできる)．

$\delta \in \mathbb{R}^*$ を任意の無限小とする．定理 2 により，
$\dfrac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) - f(\varphi(a), \psi(a))}{\delta} \approx \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a)) + \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$ が示せればよい．ここで，

$$\frac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) - f(\varphi(a), \psi(a))}{\delta}$$

$$= \underbrace{\frac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) - f(\varphi(a+\delta), \psi(a))}{\delta}}_{(1)} + \underbrace{\frac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a)) - f(\varphi(a), \psi(a))}{\delta}}_{(2)}$$

だから，$(1) \approx \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$, $(2) \approx \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a))$ となることが示せればよい．

$(1) \approx \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$: 定理 4,(1) により，無限小または 0 であるところの δ^* で，$\psi(a+\delta) = \psi(a) + \psi'(a)\delta + \delta\delta^*$ となるものがとれる．$\langle \varphi(a+\delta), \psi(a)\rangle$ は近傍 U に含まれるから，平均値定理を $\mathcal{U}^*$ で適用すると，0 と $\psi'(a)\delta + \delta\delta^*$ の間にある δ^{**} で，$f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) = f(\varphi(a+\delta), \psi(a)) + f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a) + \delta^{**})(\psi'(a)\delta + \delta\delta^*)$

となるものがとれる．δ^{**} は無限小である．この式を (1) に代入すると，

$$(1) = \frac{f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a) + \delta^{**})(\psi'(a)\delta + \delta\delta^*)}{\delta}$$

$= f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a))\psi'(a) + \Big(f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a) + \delta^{**})\delta^*\Big)$ となる．補題 3 により $\Big(\cdots\Big)$ は無限小または 0 だから，$(1) \approx \psi'(a) f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a) + \delta^{**})$ である．φ の連続性と定理 1 により $\varphi(a+\delta) \approx \varphi(a)$ だから，f_y の x 連続性と定理 1 により $f_y(\varphi(a+\delta), \psi(a)+\delta^{**}) \approx f_y(\varphi(a), \psi(a))$ である．したがって，補題 3, (2) により，$(1) \approx \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$ である．

$(2) \approx \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a))$: 定理 4,(1) により，無限小または 0 であるところの $\delta^* \mathbb{R}^*$ で $\varphi(a+\delta) = \varphi(a) + \varphi'(a)\delta + \delta\delta^*$ となるものがとれるから，

$$(2) = \frac{f(\varphi(a) + \varphi'(a)\delta + \delta\delta^*, \psi(a)) - f(\phi(a), \psi(a))}{\delta} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

である．補題 3 により，$\varphi'(a)\delta + \delta\delta^*$ は無限小または 0 だから，再び定理 4,(1) により，

$f(\varphi(a) + \varphi'(a)\delta + \delta\delta^*, \psi(a)) = f(\varphi(a), \psi(a)) + f_x(\varphi(a), \psi(a))(\varphi'(a)\delta_+\delta\delta^*) + (\varphi'(a)\delta + \delta\delta^*)\delta^{**}$

となる無限小または 0 であるところの δ^{**} がとれる．上の式を (3) に代入すると，

$$(3) = \frac{\cancel{f(\varphi(a),\psi(a))} + f_x(\varphi(a),\psi(a))(\varphi'(a)\delta_+\delta\delta^*) + (\varphi'(a)\delta + \delta\delta^*)\delta^{**} - \cancel{f(\varphi(a),\psi(a))}}{\delta}$$
$$= f_x(\varphi(a),\psi(a))\varphi'(a) + \underbrace{f_x(\varphi(a),\psi(a))\delta^* + (\varphi'(a)+\delta^*)\delta^{**}}_{\text{無限小または } 0}$$
$$\approx f_x(\varphi(a),\psi(a))\varphi'(a)$$

である．ここでは $f_x(\varphi(a),\psi(a))$ のみが用いられていて，f_x の連続性は全く用いられていないことに注意する． ❏

「微分積分学」というような名称の教科書では，多変数関数の「全微分可能性」が議論されることが多く，上の定理 7 の等式も，f が点 $\langle u,v\rangle$ で全微分可能，という前提のもとに紹介されていることが多いと思います．「紹介」と言ったのは，証明が省略されていたり，書いてあっても，教科書の後の方に付録として載っていたりすることが多いからですが，超準解析を用いると，この全微分可能性が一変数の関数の微分可能性の自然な拡張になっていることが，容易に理解できます．

$\mathbb{p} = \langle u,v\rangle \in (\mathbb{R}^*)^2$ が無限小であるとは[26]，$\mathbb{p} \neq \langle 0,0\rangle$ で，u, v は無限小か 0 であることとする．$\mathbb{p}$, $\mathbb{q} \in (\mathbb{R}^*)^2$ について，$\mathbb{p} \approx \mathbb{q}$ とは，(座標ごとの引き算での) $\mathbb{p} - \mathbb{q}$ が無限小か $\langle 0,0\rangle$ であることとする．

$\mathbb{p} \in (\mathbb{R}^*)^2$ が有界である，とは，$\mathbb{q} \in \mathbb{R}^2$ で，$\mathbb{p} \approx \mathbb{q}$ となるものが存在すること，とする．$\mathbb{p} = \langle u,v\rangle \in (\mathbb{R}^*)^2$ に対し，$\|\,\mathbb{p}\,\| = \sqrt{u^2+v^2}$ とする[27]．$\mathcal{U}^*$ の初等性から，$\|\cdot\|$ は通常のノルムと同じ初等的 (i.e. ある述語論理の論理式が $\mathcal{U}^*$ で成り立つこととして表現できる) 性質を持つ．

$\mathbb{p} = \langle u,v\rangle$ のとき，$f(u,v)$ を $f(\mathbb{p})$ とも表わすことにする．$(\mathbb{R}^*)^2$ の要素は，ベクトルともみなす．$\mathbb{p}$, $\mathbb{q} \in (\mathbb{R}^*)^2$ のとき $\mathbb{p}+\mathbb{q}$ は座標ごとの足し算の結果のことである．スカラ倍についても座標ごとの計算とする $\mathbb{p} = \langle u,v\rangle$, $\mathbb{q} = \langle a,b\rangle$ のとき，$\mathbb{p}\cdot\mathbb{q}$ は標準内積 $ua+vb$ のこととする．$\mathbb{0} = \langle 0,0\rangle$ とする．

次は，補題 3 と同様に証明できる:

補題 8. (1) $\mathbb{p} \in (\mathbb{R}^*)^2$ が有界であることは，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\|\,\mathbb{p}\,\| < n$ となることと同値である．

---

[26] $\langle u,v\rangle \in (\mathbb{R}^*)^2$ は $\mathcal{U}^* \models$“$\langle u,v\rangle \mathrel{\varepsilon} \mathbb{R}^2$” と同値であることに注意する．

[27] ここでも，$\sqrt{u^2+v^2}$ は，$d \in \mathbb{R}^*$ で，$\mathcal{U}^* \models$“$d \equiv \sqrt{u^2+v^2}$” となるもののことである．

(2) $\mathbb{d}^* \in (\mathbb{R}^*)^2$ を無限小または $\langle 0,0\rangle$ として，$a \in \mathbb{R}^*$ を有界な実数とするとき，$a\mathbb{d}^*$ も無限小または 0 である．したがって，$a \in \mathbb{R}^*$ が有界な実数で，$\mathbb{p} \approx \mathbb{q}$ なら，$a\mathbb{p} \approx a\mathbb{q}$ である．

(3) $\mathbb{d}^*, \mathbb{d}^{**} \in (\mathbb{R}^*)^2$ が無限小または $\langle 0,0\rangle$ なら，$\mathbb{d}^* + \mathbb{d}^{**}$ も無限小または $\langle 0,0\rangle$ である．したがって，$\mathbb{p} \approx \mathbb{p}', \mathbb{q} \approx \mathbb{q}'$ なら，$\mathbb{p} + \mathbb{q} \approx \mathbb{p}' + \mathbb{q}'$ である．

(4) $\approx$ は $(\mathbb{R}^*)^2$ 上の同値関係である．

(5) 有界な $(\mathbb{R}^*)^2$ の要素の全体は，加法と減法に関して閉じている．また，有界な $(\mathbb{R}^*)^2$ の要素の全体は，有界な $\mathbb{R}^*$ の要素でのスカラ倍に関しても閉じている．

証明. 演習. ❏

次は定理 1 と同様に証明できる:

定理 9. ある領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ と D 上の関数 $f : D \to \mathbb{R}$ について，f が $\mathbb{p} \in D$ で連続であることと，任意の無限小 $\mathbb{d} \in (\mathbb{R}^*)^2$ に対し [28)]，$f(\mathbb{p} + \mathbb{d}) \approx f(\mathbb{p})$ となることは同値である．

領域 $D \subseteq \mathbb{R}^*$ と $\mathbb{p} = \langle u, v\rangle \in D$ に対し，$f : D \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{p}$ で全微分可能とは，$\mathbb{g} = \langle \alpha, \beta\rangle \in \mathbb{R}^2$ が存在して，任意の $\mathbb{d} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$(\S)\quad \varepsilon_{\mathbb{p}}(\mathbb{d}) = \frac{f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) - f(\mathbb{p}) - (\mathbb{g}\cdot\mathbb{d})}{\|\,\mathbb{d}\,\|}$$

とすると，$\lim\limits_{\mathbb{d}\to\mathbb{0}} \varepsilon_{\mathbb{p}}(\mathbb{d}) = 0$ となることとする．$\mathbb{g}$ を f が $\mathbb{p}$ で全微分可能であることの例証とよぶことにする．

次の定理は，定理 4 と同様に証明できる:

定理 9. (1) 領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ と $\mathbb{p} \in D$ に対し，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{p}$ で全微分可能で，$\mathbb{g} \in \mathbb{R}^2$ がその例証であることは，任意の無限小 $\mathbb{d} \in (\mathbb{R}^*)^2$ に対し，無限小または 0 であるところの δ^* で，

$(\dagger)$ $f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) = f(\mathbb{p}) + \mathbb{g}\cdot\mathbb{d} + \delta^*\|\,\mathbb{d}\,\|$ となるものが存在する，ことと同値である．

(2) $f : D \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{p} \in D$ で全微分可能なら，f は $\mathbb{p}$ で連続である．

次の補題は，超準解析を経由せずにも，通常の $\varepsilon\delta$-論法による直接証明で直ちに示せる:

補題 10. 領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ と $\mathbb{p} \in D$ に対し，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{p}$ で全微分可能で，$\mathbb{g} = \langle \alpha, \beta\rangle \in \mathbb{R}^2$ がその例証のときには，f は $\mathbb{p}$ で x- かつ y-偏微分可能で，$f_x(\mathbb{p}) = \alpha$, $f_y(\mathbb{p}) = \beta$ となる．

補題 10 の逆は一般には成り立たないが，次は言える:

補題 11. 領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする． $\mathbb{p} \in D$ に対し，$f_x(\mathbb{p})$ と $f_y(\mathbb{p})$ が存在して，f_x か f_y の少なくともどちらか片方は $\mathbb{p}$ のある開近傍 U で定義されて連続なら，f は

---

28) D は開集合なので，$\mathcal{U}^* \models \mathbb{p} + \mathbb{d}\ \varepsilon\ D$ となることに注意する．

$\mathbb{p}$ で全微分可能である．

証明． 例えば f_y が $\mathbb{p}$ の近傍 U で定義されて全微分可能だとする．このとき，定理 9,(1) により，$\mathbb{g} = \langle f_x(\mathbb{p}), f_y(\mathbb{p})\rangle$ とすると，任意の無限小 $\mathbb{d} = \langle \delta^*, \delta^{**}\rangle \in (\mathbb{R}^*)^2$ に対し，$\dfrac{f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) - f(\mathbb{p}) - \mathbb{g}\cdot\mathbb{d}}{\|\,\mathbb{d}\,\|}$ が無限小か 0 になることを示せばよい．

$$\frac{f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) - f(\mathbb{p}) - \mathbb{g}\cdot\mathbb{d}}{\|\,\mathbb{d}\,\|} = \frac{f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) - f(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle) + f(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle) - f(\mathbb{p}) - \mathbb{g}\cdot\mathbb{d}}{\|\,\mathbb{d}\,\|} = (\P)$$

ここで，$\mathbb{p}+\mathbb{d}$, $\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle$ は U に属すから [29]，補題 4、(1) により，無限小か 0 であるところの μ^*, μ^{**} で，

$$f(\mathbb{p}+\mathbb{d}) - f(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle) = f_y(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle)\delta^{**} + \mu^{**}\delta^{**}$$
$$f(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle) - f(\mathbb{p}) = f_x(\mathbb{p})\delta^* + \mu^*\delta^*$$

となるものがとれる．定理 1 から，無限小か 0 であるところの $\mu \in \mathbb{R}^*$ で，$f_y(\mathbb{p}+\langle\delta^*,0\rangle) = f_y(\mathbb{p}) + \mu$ となるものが存在する．これらを上式に代入すると，

$$(\P) = \frac{(f_y(\mathbb{p})+\mu)\delta^{**} + \mu^{**}\delta^{**} + f_x(\mathbb{p})\delta^* + \mu^*\delta^* - \mathbb{g}\cdot\mathbb{d}}{\|\,\mathbb{d}\,\|} = \frac{\mu\delta^{**} + \mu^{**}\delta^{**} + \mu^*\delta^*}{\|\,\mathbb{d}\,\|} = (\natural)$$

ここで，
$$\left|\frac{\mu\delta^{**} + \mu^{**}\delta^{**} + \mu^*\delta^*}{\|\,\mathbb{d}\,\|}\right| \le |\mu| + |\mu^{**}| + |\mu^*|$$
だから，$(\natural)$ は無限小か 0 である．❏

補題 11 により，次の定理は，定理 7 の改良となっている．

定理 12. 領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ と関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対し，f が $\mathbb{p} = \langle u, v\rangle \in D$ で全微分可能とする．$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で微分可能で，$\varphi(a) = u$, $\psi(a) = v$ のとき，$f(\varphi(t), \psi(t))$ は a で微分可能で，

$$\left.\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))\right|_{t=a} = \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a)) + \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$$

が成り立つ．

証明． $\delta \in \mathbb{R}^*$ を任意の無限小とする．定理 2 により，
$\dfrac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) - f(\varphi(a), \psi(a))}{\delta} \approx \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a)) + \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$ が示せればよい．ここで，定理 4,(1) により，無限小または 0 であるところの δ^*, δ^{**} で，$\varphi(a+\delta) = \varphi(a) + \varphi'(a)\delta + \delta\delta^*$, $\psi(a+\delta) = \psi(a) + \psi'(a)\delta + \delta\delta^{**}$ となるものがとれる．

[29] つまり，$\mathcal{U}^* \models$ “$\mathbb{p} + \langle\delta^*, 0\rangle \,\varepsilon\, U$” が成り立つ．このことは，$U \in \mathcal{U}$ で，U が開集合であることから従う．

$\delta^* = \varphi'(a)\delta + \delta\delta^*$, $\delta^{**}\psi'(a)\delta + \delta\delta^{**}$ は無限小または 0 だから，$\mathbb{d} = \langle \delta^*, \delta^{**} \rangle$ とすると，全微分の定義と補題 9, 補題 10 から，ある無限小または 0 であるところの μ で，

$$\frac{f(\varphi(a+\delta), \psi(a+\delta)) - f(\varphi(a), \psi(a))}{\delta}$$
$$= \frac{\cancel{f(\varphi(a), \psi(a))} + f_x(\varphi(a), \psi(a))(\varphi'(a)\delta + \delta\delta^*) + f_y(\varphi(a), \psi(a))(\psi'(a)\delta + \delta\delta^{**}) + \mu\| \mathbb{d} \| - \cancel{f(\varphi(a), \psi(a))}}{\delta}$$

となるものがとれる．補題3により，この式の右辺は$\approx \varphi'(a) f_x(\varphi(a), \psi(a)) + \psi'(a) f_y(\varphi(a), \psi(a))$ となることが示せる． ❏

3.　完全性定理の超冪での置き換え

前節での $\mathcal{U}^*$ に対応する初等拡大は，超準解析の教科書の多くでは，完全性定理によってではなく，超冪とよばれる構成法によって得られる以下のような構造として導入されています．これは，一つには，論理学に慣れていない数学者への配慮からかもしれませんが，ここでのような $\mathcal{U}$ から出発する議論では，超冪による構成法の方が，完全性定理の証明での構成法に比べて，そこで必要となる選択公理の程度が若干軽い，ということとも関連しているかもしれません[30]．ちなみに，古典的な解析学の大きな部分は，選択公理なしで，しかも十分に「構成的」と言えるやり方で展開できることが知られているので，この超準解析を用いる議論で選択公理が必要になっていることは，構成的な立場をとる人の目には，超準解析の欠点と映るかもしれません[31]．しかし，このことは，逆に超準解析を数学の道具（instrument）と見たときに，ZF での旧鉄器時代の道具では容易に証明できなかった命題が，この選択公理による精錬加工を施された道具を用いることで容易に証明できるようになる，ということの可能性を示唆している，とも考えられます．これと関連する，非構成的な数学の意義については，[渕野 2018], [渕野 2018a] 等での議論も参照してください．

超冪による $\mathcal{U}^*$ の構成は以下のようなものです:

F を $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルターとする[32]．${}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ で $\mathbb{N}$ から V_{ω_1} への関数の全体の集合を表わすことにする．${}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ に $f \sim_F g \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in F$ として定義される同値関係を導入して，$f \in {}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ の $\sim_F$ に関する同値類を $[f]_F$ と表わすことにする．

[30] 完全性定理の一般形の証明には Prime Ideal Theorem という選択公理の帰結が必要になりますが，超冪の構成で必要になる $\mathbb{N}$ 上の超フィルターの存在のためには，$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の整列可能性があれば十分です．

[31] 関連する話題については [Dauben 1995], [w] 等を参照してください．

[32] F が集合 S 上の超フィルターであるとは，$F \subseteq \mathcal{P}(S)$, $\emptyset \notin F$, A, $B \in F$ なら $A \cap B \in F$, $A \in F$ で $A \subseteq B \subseteq S$ なら，$B \in F$, すべての $A \in \mathcal{P}(S)$ に対し A か $S \setminus A$ のどちらかは F の要素となっている，が成り立つこと[33]．F が非単項であるとは，すべての $x \in S$ に対し $S \setminus \{x\} \in F$ となることである．

[33] F がこの最後の条件以外の条件を満たすときには，F は $\mathbb{N}$ 上のフィルターである，という．

$\sim_F$ が実際に同値関係になることは，次のように示せる (実は，$\sim_F$ が同値関係になるためには，F がフイルターであればよく，超フイルターである必要はない).

補題 A1. 上で定義した $\sim_F$ は同値関係である.

証明. $f, g \in {}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ に対し，

$E_{f,g} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}$ と書くことにする.

$f = g$ なら，$E_{f,g} = \mathbb{N} \in F$ だから $f \sim_F g$ である．また，$E_{f,g} = E_{g,f}$ だから，$f \sim_F g \Leftrightarrow g \sim_F f$ である．$f, g, h \in {}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ に対し，$f \sim_F g$ かつ $g \sim_F h$ なら，$E_{f,g} \in F$ かつ $E_{g,h} \in F$ だから，$E_{f,h} \supseteq E_{f,g} \cap E_{g,h} \in F$ により，$E_{f,h} \in F$, つまり，$f \sim_F h$ である. ❏

$U^* = \{[f]_F : f \in {}^{\mathbb{N}} V_{\omega_1}\}$ として，この U^* に二項関係 E^* を $[f]_F\ E^*\ [g]_F \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in g(n)\} \in F$ により導入して $\mathcal{U}^* = \langle U^*, E^* \rangle$ とする．(E^* の定義が，$[f]_F$, $[g]_F$ の代表元の取り方に依存しないことは，F がフィルターであることから容易に示せる．)

各 $a \in V_{\omega_1}$ に対して，c_a を，常に値 a をとる $\mathbb{N}$ 上の定数値関数として，$i : V_{\omega_1} \to U^*$; $a \mapsto [c_a]_F$ とする．このときウォッシュ (Łos) の定理により，i は初等埋め込みとなり $\mathcal{U}^*$ は前節の T^* を満たす構造に拡張できる.

以下 (の『数学セミナー』誌に掲載の文章には含まれない部分) で，上に述べたことの細部をもう少し埋めてみることにする:

$F, \mathcal{U}^* = \langle U^*, E^* \rangle, i$ はこの章で導入したようなものとする．$\mathcal{U}, \mathcal{L}_\varepsilon\ \underset{\sim}{c}_a, a \in V_{\omega_1}, T^*$ は一つ前の章で導入したものである.

定理 A2. (Łos の定理の $\mathcal{U}^*$ に特化したヴァージョン)
すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n_1})$ と f_0,..., $f_{n-1} \in {}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ に対し，

(∗∗) $\mathcal{U}^* \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$

$\Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$

が成り立つ.

証明. $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ の構成に関する帰納法で示す.

φ が $x_i \equiv x_j$ の形をしているときには，(∗∗) は，$\sim_F$ の定義の言い換えにすぎないから，これは明らかに成り立つ．φ が，$x_i\ \varepsilon\ x_j$ の形をしているときには，$\mathcal{U} \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$ $\Leftrightarrow$ $[f_i]_F\ E^*\ [f_j]_F$ だから，E^* の定義から，この場合にも (∗∗) が成り立つことは明らかである.

φ が $(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ の形をしていて，φ_0 と φ_1 に対しては (∗∗) が成り立つことが分っているとき: このときには，F がフィルターであることを用いて，$\mathcal{U}^* \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F) \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models$

$\varphi_0([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$ かつ $\mathcal{U}^* \models \varphi_1([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F) \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_0(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$ かつ $\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_1(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} = \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_0(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \cap \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_1(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$ となる．

ここまでのところはすべて F がフィルターなら成りたつが，次の場合では，フィルター F が超フィルターであることと同値な条件: すべての $A \subseteq \mathbb{N}$ に対し，$A \in F \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \notin F$ となること，が用いられている．

φ が $\neg\varphi_0$ の形をしていて $\varphi_0 = \varphi_0(x_0, ..., x_{n-1})$ は $(**)$ を満たすことがわかっているとき: このときには，$\mathcal{U}^* \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F) \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \not\models \varphi_0([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F) \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_0(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \notin F \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$.

φ が $\exists x\varphi_0$ の形をしていて，$\varphi_0 = \varphi_0(x, x_0, ..., x_{n-1})$ は $(**)$ を満たすことがわかっているとき: $\mathcal{U}^* \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$ なら， $f \in {}^{\mathbb{N}}V_{\omega_1}$ で，$\mathcal{U}^* \models \varphi_0([f]_F, [f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$ となるものが存在する．帰納法の仮定から，$\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_0(f(k), f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$ である．したがって，$\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$ となる．

逆に，$A = \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} \in F$ とすると，各 $k \in A$ に対し，$a_k \in V_{\omega_1}$ で，$\mathcal{U} \models \varphi_0(a_k, f_0(k), ..., f_{n-1}(k))$ となるものがとれるから，$f : \mathbb{N} \to V_{\omega_1}$ を，

$$f(k) = \begin{cases} a_k, & k \in A \text{ のとき} \\ \emptyset, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

により定義すると，$\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi_0(f(k), f_0(k), ..., f_{n-1}(k))\} = A \in F$ となり，帰納法の仮定から，$\mathcal{U}^* \models \varphi_0([f]_F, [f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$, したがって，$\mathcal{U}^* \models \varphi([f_0]_F, ..., [f_{n-1}]_F)$ である．

❏ **(定理 A2)**

系 **A3.** すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in V_{\omega_1}$ に対し，

$$\mathcal{U} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models \varphi(i(a_0), ..., i(a_{n-1}))$$

が成り立つ．

証明． $\mathcal{U} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ なら，$\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(c_{a_0}(k), ..., c_{a_{n-1}}(k))\} = \mathbb{N} \in F$ だから，定理 A2 により，$\mathcal{U}^* \models \varphi(i(a_0), ..., i(a_{n-1}))$ である．逆に $\mathcal{U}^* \models \varphi(i(a_0), ..., i(a_{n-1}))$ なら，定理 A2 により，$A = \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{U} \models \varphi(c_{a_0}(k), ..., c_{a_{n-1}}(k))\} \in F$ となり，特に $A \neq \emptyset$ だから，$k \in A$ とすると，$\mathcal{U} \models \varphi(c_{a_0}(k), ..., c_{a_{n-1}}(k))$ つまり，$\mathcal{U} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ である．❏

以上で，i が，$\mathcal{U}$ の $\mathcal{U}^*$ への初等的埋め込みとなっていて，$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ の新しい定数記号 $\underset{\smile}{c}_a$, $a \in V_{\omega_1}$ を $i(a)$ と解釈することにより，$\mathcal{U}^*$ は，$\tilde{T}$ のモデルに拡張できることがわかったが，この拡

張はさらに，T^* のモデルにも拡張できることが，以下のようにしてわかる: 任意の $\tilde{T}$ 上の可算タイプ p に対し，p を $\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ と枚挙して，$k \in \mathbb{N}$ に対し，$a_k \in V_{\omega_1}$ を，$\{\varphi_n(x) : n \leq k\}$ を満たすようなものとし (可算タイプの定義からそのようなものは存在する)，$f : \mathbb{N} \to V_{\omega_1}; k \mapsto a_k$ とすると，ウォッシュの定理 (上の定理 A2) から，$[f]_F$ は $\mathcal{U}^*$ で p を満たす (ここで，F が非単項であることが用いられていることに注意する).

4. 初等埋め込みと巨大基数

超冪の構成は，巨大基数の研究という，上でとはまったく異なる文脈でも重要な役割を果します[34]．

ここで巨大基数という言葉を既知として使い始めてしまっていますが,「巨大基数である」ということの正式な定義が存在するわけではありません．しかし，基数 κ が巨大基数であると言ったときには，少なくとも κ は正則基数で， (*) V_κ が ZFC のモデルになる，ようなものだ，という共通認識はあると考えてよいでしょう (ここでの ZFC は，正確には理論 ZFC の中での (集合としての) 論理式の集合としての ZFC です)．不完全性定理により，上の (*) を導くような巨大基数の概念を満たす基数の存在は，ZFC では証明できないので，“... という性質を持つ基数が存在する” という形の巨大基数公理を導入することで，ZFC より真に強い公理系が得られます．

巨大基数の存在公理のうち，現在では中程度の強さを持つ公理と理解されているものに可測基数の存在があります．この公理は，バナッハ，クラトフスキー，ウラムらポーランド学派の数学者たちの測度論の研究から生れたもので，可測基数の定義はウラムによって 1930 年に与えられています．

基数 κ 上の超フィルター U は，U に含まれる κ の部分集合を測度 1, U に含まれない部分集合を測度 0 と考えることで，κ 上に 0 と 1 という値のみをとる (κ の部分集合のすべてに対する) 測度を導入するものと見ることができる．このような測度で可算加法的なものが存在するような κ を考える．κ をそのようなもののうちで最小のものとすると，κ 上の可算加法的な 2 値測度は，可算加法的であるだけでなく，κ-加法的になる．つまり，対応する超フィルター U の言葉で言うと，濃度が κ 未満の U の要素の族 $\{A_i : i \in I\}$ に対し，$\bigcap_{i \in I} A_i \in U$ が常に成り立つ．このような性質を持つ超フィルター U が κ 上に存在するような基数 κ を可測基数とよぶ．超冪の構成法を，このような超フィルターに適用すると，次の

[34] 現れる文脈が異るだけではなく，構成される超冪の性質も超準解析で用いられる超冪と，巨大基数 κ の性質から存在の保証される超フィルターを用いて構成される V の超冪は，正反対の性質を持つものになっています．

ような状況を作ることができる．${}^\kappa V$ で定義域が κ であるような関数の全体の作るクラスを表わすことにする．前節でと同様に，${}^\kappa V$ の要素 f, g に対する同値関係 $\sim_U$ を，$f \sim_U g \Leftrightarrow \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$ で定義する．$f \in {}^\kappa V$ のこの同値関係に関する同値類を $[f]_U$ と表わすことにする[35)]．$P = \{[f]_U : f \in {}^\kappa V\}$ として，P 上に二項関係 E を $[f]_U \ E \ [g]_U \Leftrightarrow \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U$ として導入し，$a \in V$ に対し，$c_a : \kappa \to V; \alpha \mapsto a$ として，クラス関数を $i_0 : V \to P; a \mapsto [c_a]_U$ で定義すると，ウォッシュの定理と類似の議論 (これも単にウォッシュの定理とよばれることが多い) により，i_0 は $(V, \in)$ の (P, E) への初等的埋め込みになる．特に E は 外延的な関係である．さらに，U に対応する二値測度の可算加法性から P 上の二項関係 E は整順的である $\llbracket$ もし，$[f_{i+1}]_U \ E \ [f_i], i \in \mathbb{N}$ となる $f_i \in {}^\kappa V, i \in \mathbb{N}$ があったとすると，E の定義から，$A_i = \{\alpha \in \kappa : f_{i+1}(\alpha) \in f_i(\alpha)\}$ として，$A_i \in U$ である．したがって，$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in U$ となる．特に $A \neq \emptyset$ だから，$\alpha \in A$ とすると，すべての $i \in \mathbb{N}$ に対し $f_{i+1}(\alpha) \in f_i(\alpha)$ が成り立つが，正則性の公理により，これは矛盾である．$\rrbracket$．したがって，モストフスキーの崩壊定理により，推移的なクラス M と同型写像 $i_1 : (P, E) \cong (M, \in)$ がとれる．$j_U = i_1 \circ i_0$ とすると，$j_U : (V, \in) \overset{\preceq}{\to} (M, \in)$ である[36)] [37)]．U は κ-加法性から，$j_U \restriction V_\kappa = id_{V_\kappa}$ で，$\alpha < \kappa$ に対し，$\alpha < [id_\kappa]_U < j_U(\kappa)$ より，$j_U(\kappa) > \kappa$ である．

一般に，初等的埋め込み $j : (V, \in) \overset{\preceq}{\to} (M, \in)$ に対して，基数 κ が上のような性質を満たすとき，κ は j の臨界点 (critical point) である，といいます．κ が初等的埋め込みの臨界点になっているときには， κ は，さまざまな反映の性質 (reflection properties) を満たすことが知られています[38)]．次は，そのような反映の性質のうち，“数学的な” ものの一つです:

位相空間 $X = (X, \mathcal{O})$ が距離付け可能であるとは，X 上の距離 d で，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ となるものが存在することだった．ここに $\mathcal{O}_d$ は X の距離 d に関する開集合の全体を表わす．

---

35) 実はこの定義では $[f]_U$ は真のクラスになってしまうため，後の議論が通らなくなってしまう．これを回避するために，$[f]_U$ は f と $\sim_U$ で同値な関数のうち，ノイマン階層に関する rank が最小のもののみを集めたもの，と定義することで $[f]_U$ を集合にすることができる．

36) 以下では，$f \in {}^\kappa V$ に対して，$i_1([f]_U)$ を簡単のため $[f]_U$ と書いている．

37) $(M, \in)$ は $(V, \in)$ の内部モデルだから，超準解析でのときとは異なり，$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ で $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ である．$j : M_0 \overset{\preceq}{\to} M_1$ で，“j は内部モデル M_0 から内部モデル M_1 への初等的埋め込みである” という主張を表わす．ただし，ここでの “初等的埋め込み” は，ゲーデル・タルスキーの真理の定義不可能性定理から，集合論の内部でのすべての論理式に関するものではありえないことに注意する (詳しくは [Kanamori 2009] Proposition 5.1 を参照)．

38) ここで反映の性質と言っているのは，“ある主張が特定の構造で成り立たないとき，この構造の，濃度 κ 未満の部分構造で同じ主張の成り立たないものが存在する”，という形に定式化できる性質のことです．

定理 A4. κ を初等的埋め込み j の臨界点とするとき，任意の第一可算な，濃度が κ の位相空間 X が距離付け可能でないなら，X の濃度 κ 未満の部分空間 Y で距離付け可能でないものが存在する[39)].

証明. X は (集合としては) κ であるとしてよい，このとき，$M \models$“ 距離空間 $j(\kappa)$ は距離付け可能でない (サイズが $j(\kappa)$ 未満であるところの) 部分空間 κ を持つ ” となるから，j の初等性 (つまり j が初等的埋め込みであるということ) から，定理の主張が (V で) 成り立つことがわかる．第一可算性の仮定は，M で $j(X)$ の部分空間としての κ が位相空間 X と一致することを保証するために用いられている．

証明の細部をもう少し詳しく見ることにする．$X = \langle \kappa, \mathcal{O} \rangle$ とする．$\mathcal{O}$ は位相空間 X の開集合の全体である．X は第一可算だから，そのことの例証 $B : \kappa \times \omega \to \mathcal{O}$ がとれる．つまり，B は，各 $\alpha \in \kappa$ に対し，$\mathcal{U}_\alpha = \{B(\alpha, n) : n \in \omega\}$ は x の近傍基底になっている，ようなものである．j が初等的埋め込みであることから，$M \models$“$j(X) = \langle j(\kappa), j(\mathcal{O}) \rangle$ は位相空間で $j(B)$ は $j(X)$ が第一可算であることの例証である ” が成り立つ．M で，κ を $j(\kappa)$ の部分空間と見たときには，$j(\omega) = \omega$ だから，κ の各点 $\alpha = j(\alpha)$ は，$\{U \cap \kappa : U \in j(\mathcal{U}_\alpha)\} = \{j(B)(\alpha, n) \cap \kappa : n \in \omega\} = \{B(\alpha, n) : n \in \omega\} = \mathcal{U}_\alpha$ である．このことから，(M で) $j(X)$ の部分空間としての κ は，$X = \langle \kappa, \mathcal{O} \rangle$ となっていることがわかる．$X = \langle \kappa, \mathcal{O} \rangle$ は V で距離づけ可能でないから，当然 M での距離づけも可能でない，このことから，$M \models$“$j(X)$ は濃度が $j(\kappa)$ 未満の距離付け可能でない部分空間を持つ” となることがわかるが，j が初等的埋め込みであることから，$V \models$“X は濃度が κ 未満の距離付け可能でない部分空間を持つ” が成り立つ． ❑

5. ラインハートは間違っていたのか?

前節の最後で述べた状況: “M は V の内部モデルで[40)] $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ が存在して，基数 κ が j の臨界点になる” は，実は κ が可測基数であることの特徴付けとなっています．j をこのような初等的埋め込みとすると，$\{A \subseteq \kappa : \kappa \in j(A)\}$ が κ-加法的な非単項超フィルターになるからです ⟦$j : V \to M$ が，κ を臨界点とする初等的埋め込みであるとして，

---

39) 後に述べるように，κ が初等的埋め込みの臨界点になっていることは，κ が可測基数であることと同値である．κ がここで述べたような反映の性質を持つためには，ZFC を超える何らかの仮定が必要となることが知られている．例えば，$V = L$ (“すべての集合はゲーデルの意味で構成的である”) + “弱コンパクト基数は存在しない” を仮定すると (ZFC にこれらの主張を付加した体系は ZFC と無矛盾等価です)，すべての非可算正則基数は，定理 A4 でのような性質を持たないことが示せる．

40) クラス M が V の内部モデルであるとは，M は推移的で (つまりすべての $x \in M$ と $y \in x$ に対し $y \in M$ が成り立ち)，$\mathrm{On} \subseteq M$ で，M は ZF の公理の一つ一つを満たすことである．

$U = \{A \subseteq \kappa : \kappa \in j(A)\}$ とする．初等性から，$j(\kappa) \in \mathrm{On}$ だから，$\kappa < j(\kappa)$ となる．つまり，$\kappa \in j(\kappa)$ だから，$\kappa \in U$ である．初等性から $j(\emptyset) = \emptyset$ だから $\emptyset \notin U$ である．$A \in U$ で $A \subseteq B \subseteq \kappa$ なら，$\kappa \in j(A) \subseteq j(B)$ だから，$B \in U$ である．

$\delta < \kappa$ で，$\langle A_\alpha : \alpha < \delta\rangle$ を U の要素の列とすると，$j(\delta) = \delta$ と j の初等性から，
$M \models$ “$j(\langle A_\alpha : \alpha < \delta\rangle)$ は長さ δ の列である” で，各 $\alpha < \delta$ に対し，これも $j(\alpha) = \alpha$ と j の初等性から，
$M \models$ “$j(A_\alpha)$ は $j(\langle A_\alpha : \alpha < \delta\rangle)$ の α 番目の成分である” となる．したがって，$j(\langle A_\alpha : \alpha < \delta\rangle) = \langle j(A_\alpha) : \alpha < \delta\rangle$ である．$\kappa \in j(A_\alpha)$ が各 $\alpha < \delta$ に対し成り立つので，$\kappa \in \bigcap_{\alpha<\delta} j(A_\alpha) = j(\bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha)$ となる．つまり，$\bigcap_{\alpha<\delta} A_\alpha \in U$ である．$]\!]$.

上で見たように，κ が内部モデル M への自明でない初等的埋め込み $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ の臨界点となっていることは，κ が可測基数であることと同値であるが，この特徴付けから，可測基数の “大きさ” に関する次のような評価が可能になる[41)]．

κ を基数とするとき，$C \subseteq \kappa$ が club であるとは，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$C \cap \alpha$ が α で cofinal なら，$\alpha \in C$ が成り立ち (closed), すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$\beta \in C$ となる $\alpha \leq \beta < \kappa$ が存在する (unbounded) ことである．

$S \subseteq \kappa$ が定常である，とは，すべての club な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ が成り立つことである．$S \subseteq \kappa$ が κ で定常なら，S は κ で上の意味で unbounded である．

基数 κ が Mahlo 基数であるとは，κ は正則基数で，$S = \{\mu < \kappa : \mu$ は正則基数である $\}$ が κ で定常となることである．ある性質 Φ を持つ順序数 $< \kappa$ が定常個 (stationarily many) 存在する，とは，$\{\alpha < \kappa : \alpha$ は Φ を満たす $\}$ が κ の定常集合となることである．

補題 A5. κ を初等埋め込み $j : V \to M$ の臨界点とする．このとき，

(1) κ は正則基数である．

(2) κ は極限基数である．

(3) κ は強極限である．したがって，(1) と合せて κ は強到達不可能基数である．

(4) κ は Mahlo 基数である．

(5) κ 以下に Mahlo 基数が定常個存在する．

証明. (1): もし κ が正則基数でなかったとすると，$\delta = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ となり，κ 未満の順序数

[41)] 以下の補題 A5 は，それほど大がかりな準備なしに説明できる命題として述べているにすぎない．実際には，これよりずっと強い主張 (たとえば，κ は 弱コンパクト基数で，κ の下に定常個の弱コンパクト基数が存在する) が成り立つ．

の上昇列 $\vec{\alpha} = \langle \alpha_\xi : \xi < \delta \rangle$ で， $\kappa = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \delta\}$ となるものがとれる．このとき，初等性から，$M \models j(\kappa) = \sup j(\{\alpha_\xi : \xi < \delta\}) = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \delta\} = \kappa$ となるから矛盾である．

(2): もし $\kappa = \mu^+$ なら，初等性から，$M \models j(\kappa) = (j(\mu))^+ = \mu^+ \leq \kappa$ となるので矛盾である．

(3): $\mu < \kappa$ とすると，$\mathcal{P}(\mu) \subseteq M$ である: $S \subseteq \mu$ なら，$j(S) \subseteq j(\mu) = \mu$ だから，(*) $M \ni j(S) = S$ である．(特に，$\mathcal{P}(\mu)^M = \mathcal{P}(\mu)$ である．) $\delta = 2^\mu$ として， $\mathcal{P}(\mu) = \{S_\alpha : \alpha < \delta\}$ とする，ここに， $\vec{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ は 1-1 とする．もし，$\delta > \kappa$ なら，(*) により，$S_\kappa = j(S_\kappa) = S_{j(\kappa)}$ となり，$M \models$“$j(\vec{S})$ は 1-1” に矛盾する．もし，$\delta = \kappa$ なら，$\kappa < j(\kappa)$ だから，$\mathcal{P}(\mu)\{S_\alpha : \alpha < \delta\} \subsetneqq \{j(S_\alpha) : \alpha < j(\delta)\} = \mathcal{P}(\delta)^M$ となり，矛盾である．したがって，$2^\mu = \delta < \kappa$ である．

(4): $C \subseteq \kappa$ を club とするとき，C が正則基数基数を含むことを示せばよい．初等性から，$M \models$“$j(C)$ は club である” が成り立つ．$j(C) \cap \kappa = C$ だから，$j(C)$ は κ で unbounded である．したがって，$\kappa \in j(C)$ である．(1) により κ は正則基数なので，$M \models$ “κ は正則基数である” が成り立つ[42]．このことから $M \models$“$j(C)$ は正則基数を要素として含む” が言えるので，初等性から，C は正則基数を要素として含む．

(5): (4) により κ は Mahlo 基数だから，$M \models$“κ は Mahlo 基数である” である．したがって，(4) と同様に議論すると，κ 未満の Mahlo 基数が定常個存在することがわかる．

前節の終りで述べたように，κ が初等的埋め込み $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ の臨界点となっているときには， κ で，さまざまな反映の性質が成り立つことが示せますが，そのような性質を持つ基数が存在する，という主張は自然な要請とみなせるので，集合論の公理系の “正しい” 拡張の候補の一つでもあり，深く研究されています．筆者の最近の研究テーマの一つにも，$\aleph_2$ や，$2^{\aleph_0}$, $(2^{\aleph_0})^+$ といった，通常の数学との関連の深い小さな非可算基数が強い反映の性質を持つことの可能性とその意味の探求があります．

κ が初等的埋め込み $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ の臨界点になっている，という命題に M が V の大きな部分となっていることを保証する条件を付け加えてゆくと，より強い巨大基数の概念が得られ，導かれる反映の性質もより強いものになります．例えば，現代の研究に頻繁に現れる超コンパクト基数は，すべての $\lambda > \kappa$ に対し，初等的埋め込み $j : V \xrightarrow{\preceq} M$ で，κ は j の臨界点で， $j(\kappa) > \lambda$ かつ， M は λ 列に関し閉じている，ようなものが存在する，という性

[42] これは直接確かめることもできるが，もう少し効率のよい把握の仕方としては，“κ は正則基数である” という性質が (Lévy 階層での) Φ^1-論理式で表現されることから成り立つ，と考えることができる．

質で特徴付けられます．M が λ-列に対して閉じているとは，すべての，長さが λ の，M の要素の列 s に対し，$s \in M$ が成り立つことです．内部モデル M が，すべての基数 λ に対し，λ-列で閉じているなら $M = V$ となるので，この最後の条件は，M が V に近いものになっていることの表現の一つ，と解釈することができます．定義から，κ が超コンパクト基数なら，κ は可測基数ですが，κ が 超コンパクト基数であることは，κ が可測基数であることよりはるかに強い条件になっています．例えば，κ が超コンパクト基数のときには，定理 A4 で "濃度が κ の" という制限を落としたものが成り立ちます．

定理 A6. κ を超コンパクト基数として，X を任意の第一可算な距離付け可能でない位相空間とするとき，X の濃度が κ 未満の部分空間 Y で距離付け可能でないものが存在する．

証明. X を第一可算な距離付け可能でない位相空間とする．X の濃度が κ 未満なら，$Y = X$ とすればよいから，X の濃度は κ かそれ以上としてよい．このとき，一般性を失なうことなく，ある基数 $\lambda \geq \kappa$ に対し，$X = \langle \lambda, \mathcal{O} \rangle$ であるとしてよい．$\mathcal{O}$ は X の開集合の全体である． X が第一可算であることから，そのことの (定理 A4 の証明でと同じ意味での) 例証 $B : \lambda \times \omega \to \mathcal{O}$ がとれる．

仮定から，初等的埋め込み $j : V \overset{\preceq}{\to} M$ で κ が臨界点となっており，$j(\kappa) > \lambda$ で，

$(*)$ M は λ-列に関して閉じている

ようなものが存在する．

$Y = j[\lambda]$ とすると，Y は $(*)$ により M の要素となり，$M \models$ "$Y \subseteq j(\lambda) \wedge |\,Y\,| = \lambda < j(\kappa)$" が成り立つ．$Y$ を $j(X) = \langle j(\lambda), j(\mathcal{O}) \rangle$ の部分位相で考えると，定理 A4 と同様の議論で，$j\restriction\lambda : \lambda \to j[\lambda]$ は X から Y への位相同型となる．したがって Y は V で距離付け不可能なので，M でも距離付け不可能である．このことから $M \models$ "$j(X)$ の濃度 $j(\kappa)$ 未満の部分空間で距離付けが可能でないものが存在する " が成り立つことがわかる．j が初等的埋め込みであることから，$V \models$ "X の濃度 κ 未満の部分空間で距離付けが可能でないものが存在する " が成り立つ． ❏

このような背景から，ラインハート (William Reinhardt, 1939–1998) は 1960 年代終りに，V から V への (自明でない) 初等的埋め込みが存在する，という命題を，究極の巨大基数公理として提案しました．

ところが，この提案からしばらくして，キューネンにより，そのような初等埋め込みの存在が ZFC と矛盾することが証明されてしまったのです．現在までに，このラインハート基数の

矛盾の証明は，主張のバリエーションも含めていくつも知られています．[Kanamori 2009] には，キューネンによるオリジナルの証明に加えて，原田幹夫とウディンによる二つの証明も示されています．また，[Cantor's Attic] には，これに加えて，Hamkins, Kirmayer and Perlmutter, Zapletal, 鈴木晃の関連結果の引用があります．矛盾の証明や関連結果の数がこの "間違い" の重要さを示唆している，と言えるでしょう．

ラインハートの矛盾する公理の提案，という "間違い" は，数学に，肯定的な意味でも否定的な意味でも大きな影響を与えたと言えると思います．否定的な影響の一つは，(主に集合論をあまりよく知らない人たちの) 巨大基数に対する不信感をあおったことでしょうが，肯定的な影響の方は，この矛盾を避けて，いかにして大きな巨大基数の理論を展開できるか，という挑戦的問題を提起して，研究の進展を促したことでしょう．実はラインハート基数は ZFC とは矛盾することが知られているものの，選択公理を除いた ZF と矛盾するかどうかは分っていません．最近では ZF と矛盾しないなら，そのことから何が導けるか，という観点からの研究もいくつもなされているほどです[43]．集合論の公理系を拡張する公理では，不完全性定理により，究極の無矛盾性の証明は不可能ですが，ZF にラインハート基数の存在公理を付け加えた体系の妥当性の間接証明のようなものが何らかの形で得られないとは限らないので，その意味で，ZF に対しては，ラインハートは実は間違っていなかった，という結論が得られる，というシナリオの可能性もゼロではないかもしれません．

集合論やそれを含む数理論理学は 20 世紀の後半以降に爆発的な発展を遂げた (かつ，さらに遂げつつある) ので，間違いとそのフォローアップ，として捉えられるような流れも，ここで話したこと以外にもたくさん起っています．しかし私の知っている限りでは，そのような場合の間違いのフォローアップは，それが単に間違いの綻び合せになっているのではなくて，より積極的に次の創造的なステップへの契機となっていることの方が圧倒的に多い，という印象を受けます．

参考文献

[Cantor's Attic] Cantor's Attic, Kunen inconsistency,
http://cantorsattic.info/Kunen_inconsistency

[43] ラインハート基数を超コンパクト基数でのように，"すべての λ に対し $j(\kappa) > \lambda$ となる初等的埋め込み $j : V \overset{\preceq}{\to} V$ が存在する" という性質に拡張した「超ラインハート基数」が議論されることさえあります．

[Bell 2017] John L. Bell, Continuity and Infinitesimals, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/continuity/

[Dauben 1995] Joseph W. Dauben, Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey, Princeton University Press, Princeton, (1995).

[渕野 2007] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門,『ゲーデルと 20 世紀の論理学』第 4 巻，集合論とプラトニズム，東京大学出版会 (2007) に収録.
http://fuchino.ddo.jp/books/intro-to-set-theory-and-constructibility.pdf

[渕野 2013] 渕野 昌，現代の視点からの数学の基礎付け，リヒャルト・デデキント著，『渕野 昌 翻訳／解説，数とは何かそして何であるべきか』，ちくま学芸文庫，(2013) の付録 C.

[渕野 2018] 渕野 昌，カントルの精神の継承 — 無限集合の数学／超数学理論としてのカントルの集合論のその後の発展と，その「数学」へのインパクト， 数学文化， No.29, (2018), 26–41.
この論考の拡張版:
http://fuchino.ddo.jp/articles/cantor-math-culture-2018-x.pdf

[渕野 2018a] 渕野 昌，数学と集合論 — ゲーデルの加速定理の視点からの考察 —, 科学基礎論研究，Vol.46, No.1 (2018), 33–47.
http://fuchino.ddo.jp/papers/speedup-th.pdf

[渕野 ω_0] 渕野 昌，数理論理学，2012 年前期 講義ノート，
http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

[渕野 ω_1] 渕野 昌，数理論理学，2017 年前期 講義ノート，
http://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss13.pdf

[渕野 ω_2] 渕野 昌，本稿原稿の (証明や他の細部を含む) 拡張版，
http://fuchino.ddo.jp/articles/susemi2018-x.pdf

[Kanamori 2009] Akihiro Kanamori, “The Higher Infinite,
Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings”, Second Edition, Springer

(1993/2009). 日本語訳: 渕野 昌訳,『巨大基数の集合論』, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998, 現在廃版だが, 図書館にはあるかもしれない).

[菊池 2014] 菊池 誠,『不完全性定理』, 共立出版 (2014).

[齋藤 1976] 齋藤 正彦,『超積と超準解析 ―ノンスタンダード・アナリシス』, 東京図書 (1976/1992)

[上野 2016] 上野 健爾, ライプニッツと微積分, 数学文化 No.26, (2016), 8–22.

[w] Wikipedia on “Criticism of non-standard analysis”,
https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis