冬の旅 — ポーランドとチェコへの数学の旅[1]

淵野 昌

(2016 年 8 月 25 日)

2016 年の初めに，ポーンランドのカトヴィチェ，ウストロン，ヴロツワフ，チェコ共和国のヘイニッツェ，プラハを巡る旅をしました．この旅行のことや，それにからめて，ポーランドやチェコの集合論や一般位相空間論の研究の歴史などについても少し書いてみたいと思います．

＊　＊　＊

1　冬の旅

シューベルトが死の前年に作曲した歌曲集「冬の旅」(Winterreise) は，絶望して追われるように故郷を去った旅人が死に場所を求めてさまよい，最後は気が狂って死んでゆくことを歌ったヴィルヘルム・ミュラー (Willhelm Müller) の壮絶な詩につけられた音楽である[2]．多和田葉子さんもどこかで書いていたが，この歌曲集

[1]以下の文章は,『数学セミナー』2016 年 6 月号に掲載された同名の記事の拡張版です．字数の制限のため，数学セミナーに掲載された文章では取り上げることのできなかった，いくつかの事項や，写真などを含みます．この文章はまだ書きかけです．本文で取り上げた，数学に関するもう少し詳しい解説を付録として付け加えようと思っています．この文章の最新版は

`http://fuchino.ddo.jp/articles/winterreise2016ex.pdf`

としてダウンロードできます．

神戸大学での同僚の酒井拓史氏には，本稿の投稿前の原稿に目を通していただき，いくつかの有益なコメントをいただきました．ここに感謝の意を表します．

本稿で触れた，2015 年度の研究／研究討論／学術講演のための旅行は，独立行政法人日本学術振興会科学研究費助成事業挑戦的萌芽研究の補助を受けています．また，同じく本稿で触れた，Isaac Newton Institute (INI) の滞在では，INI から滞在費の補助を受けています．これらの補助に対し感謝の意を表します．

[2]ただし「最後は気が狂って死んでゆく」というのは，どんどん象徴的になってゆくこの歌曲集の原詩の最後の方の一つの解釈にすぎない．もっと無難な解釈では，単に「絶望にうちのめされる」というような終りともとられる．

の中にあって，人口に膾炙している「菩提樹」が甘苦い昔の思い出を歌った歌なので，この歌だけを知っていると,「冬の旅」は，暖炉にあたって感傷にひたっているブルジョアのための音楽だと勘違いしてしまいがちかもしれない．この歌曲集は，2016 年の我々には，中近東から戦火をのがれて北ヨーロッパに渡ってきた難民登録を求める人たちの運命とも重なって聴こえる．

もちろん私の今回のポーランドとチェコへの「冬の旅」はそんな悲愴なものでは全然なかったのだが，後にも書くような事情から，二週間ちょっとの短い期間に，機内泊も含めると宿泊場所を 6 回も変えて移動することになった．これでは,「旅人」の気分にひたる，というより旅人そのもので，現代のノマドとしての体験を満喫（?）した．

昔ベルリンに住んでいたころに，ポーランドのワルシャワやヴロツワフやカトヴィツェの大学や科学アカデミー，まだチェコスロバキアだったころのプラハの大学や科学アカデミーから招待されてこれらの場所を頻繁に訪問したのは，東西の壁の崩壊前後だったので，もう 20 年以上も前のことである．今これらの場所に行ってみると全く違った国のようでもあり，しかし昔から全く変っていない場所でもあるようにも見え，不思議な感慨を憶える．

あのころは，東欧はすごく別世界のような気がしていたので，帰りの列車がベルリンの街に入ると「ああやっと帰ってきた」というような安堵感を感じたものだったのだが，現在住んでいる日本からポーランドやチェコへ行ってみると，逆に「北ヨーロッパに帰ってきた」安堵感が感じられる．

ポーランドは，今回も訪問したカトヴィツェ (Katowice) もヴロツワフ (Brocław) も一昨年暮にカトヴィツェのシレージア大学で大学院生のために集中講義を行った折に久しぶりに訪れていたのだが，チェコについては，記憶に間違えがなければ 1996 年のトポロジーの国際学会 Toposym 1996 への参加でプラハを訪れて以来，20 年を経て今回が初めてだった．

この旅のもともとの目的は，チェコのポーランドやドイツとの国境の近くのヘイニッツェ (Hejnice) という町にある昔の修道院を改修して作られた研修センターで開かれた Winter School for Abstract Analysis というチェコスロバキアの時代からほぼ毎年開催されている研究集会に参加することだった (以下では，手短に Winter School と呼ぶことにする).

Winter School の行なわれた昔修道院だった研修センターと教会．Wikipedia によるとこの聖母マリア訪問教会は火災で焼けて 1729 年に再建されているということだが，Heinice (ドイツ語名では Haindorf) は，この教会を中心として，中世から聖母マリア崇拝の巡礼地として賑っていたということである．

この研究集会には二つセクションがあってその一つは解析系の研究集会で，もう一つはトポロジーと集合論にあてられたものである．二つとも独立して違う時期に開かれているので，私は解析系の Winter School については，それが本当に開催されているものなのかどうかもちゃんと知らなかったのだが，今回の Winter School には，測度論の研究をされているヴロツワフのリペツキ (Zbigniew Lipecki) 先生が参加していて，彼は両方の Winter School に参加することがあるということで，彼から直接に色々と話を聞いて解析系の Winter School も本当に存在することが確認できた．

今年の Winter School では，集合論の標準的な教科書である [6] や，それより古い緑色の本 [5] で有名なイェヒ (Thomas Jech) 先生がテュートリアル講師予定者の 1 人になっていた．イェヒ先生には最近ずっと御目にかかっていなかったので，彼に久しぶり会うためにもぜひ出席してみようと思ったのだった．

中国の Zhangzhou (□州 — ただし “□” は ‘さんずい’ に ‘章’) で昨年に開かれたトポロジーの国際学会で，ブール代数に関するモノグラフを一緒に共著で書くことになっているカトヴィツェのブワスチック (Aleksander Błaszczyk) 教授に御目にかかったときに，Winter School に参加する予定のことを話すと，では執筆の打合せに Winter School の前の週にカトヴィツェに来てはどうか，と提案されたので，この招待を受けることにして，ポーランドとチェコを巡る 2 週間半の旅行が実現したのだった．でも，結局この旅行は，二つの別々の旅というよりは，もっと関連を持つものになることになった．それは，後でもう少し詳しく書くように，イェヒ先生

の Winter School でのテュートリアルが，私がブール代数のモノグラフで書こうとしているテーマの一つである，測度代数に関するものであることが後になって判明したからである．

2　カトヴィツェへの旅

上で書いたように，ポーランドへの旅は，ブール代数に関するモノグラフの共著者のブワスチック教授との打合せがおもな目的だった．

ブール代数と言うと，工学系の人は論理回路のようなものを思い浮かべるかもしれないが，我々のブール代数 (複数) は主に無限の代数構造である．ある集合 X の冪集合 (べきしゅうごう — X の部分集合の全体からなる集合) $\mathcal{P}(X)$ は，集合算，$\cap$, $\cup$, $-$ (各 $a \in \mathcal{P}(X)$ に集合差 $-a = X \setminus a$ を対応させる演算) と定数 $0_{\mathcal{P}(X)} = \emptyset$, $1_{\mathcal{P}(X)} = X$ を持つ代数構造 (冪集合代数) $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, -, 0_{\mathcal{P}(X)}, 1_{\mathcal{P}(X)} \rangle$ とみなすことができる．より一般的には，この形をした代数構造の部分構造 (集合代数) の全体に対し，それらのすべてが満たす代数的性質を有限の公理系として書くことができて，この公理系を満たす (必ずしも集合代数とは限らない) 代数構造をブール代数とよぶ．今,「必ずしも集合代数とは限らない」と断ったのだが，実は，ストーンの定理により，どのブール代数も集合代数と代数構造として同型になることが示せる． ブール代数 B は，その $\wedge$ (集合代数での $\cap$ に対応する演算である) と対称差 $\triangle$ ($a, b \in B$ に $a \triangle b = (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a)$ を対応させる演算 — ただし，“$-$” は集合代数での補集合の演算に対応する一項演算で，$\vee$ は集合代数での $\cup$ に対応する二項演算である) をそれぞれ乗法と加法と解釈することで単位元 1_B を持つ環になる．この環は乗法に関して $x^2 = x$ がすべての要素に対し成り立つという著しい性質を持つが，この性質を持つ環をブール環とよぶ．逆に，単位元を持つブール環が与えられると，上のような解釈を逆にたどって対応するブール代数を作ることができるので，ブール代数と単位元を持つブール環は同型を除いてお互いに一対一に対応する．

代数的な視点からは，ブール環はそれほど面白い対象とは言えないかもしれないが，環をイデアルで割って新しい環を作る，という環論での基本的な構成法 (ブール環をイデアルで割ると再びブール環になることは直ちにわかる) のブール代数への翻訳はブール代数の重要な構成法の一つとなる．集合代数 $B = \langle B, \cap, \cup, -, \emptyset, X \rangle$ に対して $I \subseteq B$ がこの意味でのイデアルであることは，

(1) $\emptyset \in I$, $a \in I$ で,

(2) $b \subseteq a$ かつ $b \in B$ なら $b \in I$,

(3) $a, b \in I$ なら $a \cup b \in I$ という性質を満たすことである,

という性質を満たすことである，として特徴付けられることが容易に確かめられる．

閉区間 $[0,1]$ のボレル部分集合 (開集合の全体から出発して可算和とブール演算の可算回の適用により得られるような $[0,1]$ の部分集合) の全体を $\mathsf{Borel}([0,1])$ と表すことにすると，これは，演算 $\cap$, $\cup$, $-$ と定数 $0 = \emptyset$, $1 = \mathsf{Borel}([0,1])$ により集合代数となる．この集合代数上には，20 世紀の前半のポーランド学派が精力的に研究した二つのイデアルが自然に定義できる．痩集合 (meager set) となっているボレル集合の全体のなすイデアル (ここではこれを $\mathcal{M}$ で表すことにする) と，零集合となっているボレル集合の全体のなすイデアル (ここではこれを $\mathcal{N}$ と表すことにする) である．$\mathsf{Borel}([0,1])$ をこれらのイデアルで割ってできるブール代数 $\mathbb{C} = \mathsf{Borel}([0,1])/\mathcal{M}$, $\mathbb{B} = \mathsf{Borel}([0,1])/\mathcal{N}$ は，それぞれ，コーエン代数，ランダム代数とよばれている．

これらの名称は強制法に由来する．コーエン代数の「コーエン」は，強制法の理論を発見した P. コーエン (Paul Cohen) である．コーエンが強制法の手法を用いて作った連続体仮説の成り立たない集合論のモデルは，ここでのコーエン代数に対応するような generic な実数 (Cohen reals) を議論の出発点で選んだ集合論のモデル (ground model) にたくさん付け加えるものだったことにちなむ.「ランダム代数」という命名も,「コーエン代数」と同様にソロベイの命名によるものである．ソロベイは基礎モデルの実数でコードされる零集合のどれにも含まれないような generic 拡大での実数をランダム実数と呼んだ．ここで導入したランダム代数は，この意味でのランダム実数の導入に対応するものになることが (強制法の基礎を知っていれば) すぐにわかる．強制法とブール代数の対応については，ここではきちんと説明するだけの紙面の余裕がないが (執筆中の [3] にはこのへんの詳しい説明を書く予定である)，それぞれの強制概念と完備ブール代数 ($\mathbb{C}$ や $\mathbb{B}$ は実は完備ブール代数である) が同型を除いて一意に対応することが知られている．この対応のため，強制法の理論の進歩と並行して，ブール代数の理論でも近年多くの新しい結果が得られている．共著のモノグラフでは，特に私が担当することになっている，強制法を使う後半の部分で，そのような結果について，1989 年に編纂されたブール代数のハンドブック [9] 以降の結果を積極的に盛り込んだものにする，という大胆な計画

を立てているのである．

既に書いたように，共著者のブワスチック教授とこの本の内容についての協議をする，というのが今回のポーランド滞在の目的だったのだが，保険の制度で義務づけられている保養 (保養といっても温泉地でゆっくりするというようなものではなく，ぎっしりつまった医療検査やフィジカル・テラピーのプログラムをこなさなくてはいけないものである) のため，奥さんとカトヴィツェの近郊の保養地ウストロンに行く予定になっていたブワスチック教授が，私の知らない間に，週の後半に彼等と一緒にウストロンに行き，そこで (彼等の保養のプログラムの合間に) 協議の続きをする，というスケジュールを立てていた．しかも私を驚かすためにわざと何も言ってくれなかったので，そのサプライズにはまってしまい出発の直前にこれを知ってびっくりしてしまうことになった．

カトヴィツェに着いた日は雪が降っていて，久しぶりに冬景色が満喫できると期待したのだったが，次の日から日本に帰るまでずっと暖い日が続き，どこでもほとんど雪が降らなかったのは残念だった．着いた日の次の日は日曜で，ブワスチック教授の家に招待された．カトヴィツェではセミナーで講演をして，昔に共著論文を一緒に書いたことのあるプレヴィック教授ともディスカッションをした．

週の後半に移動したウストロンでは，ブワスチック夫妻の宿泊しているサナトリウムの隣のホテルに泊った．夫妻の療法のプログラムの合間に，隣町の，スキーのジャンプ台で有名なヴィスワの旅籠屋風のレストランや，山頂の山小屋のレストランなどに席を移して暖炉の火を見ながら討論をした．

ウストロンを見下ろす山頂の山小屋で執筆の打合せをするブワスチック教授と筆者．
同行したブワスチック夫人による撮影．

議論をするうちに私の書かなくてはいけない部分の計画がどんどん本格的な難しいものになってきてしまったのには困ったが，同時に，これになんとしても挑戦しな

くてはいけない，という意欲も湧いてきた．

3　無限からの光芒

ポーランドの近代数学について日本語で書かれた読みものに，志賀浩二 [10] がある．この本は，ちょうど私がポーランドの数学者たちと頻繁に研究交流を持つようになった頃に出版されたので，私にとって，ポーランド数学史入門のための良い教科書となった．この本をあらかじめ読んでいたおかげで，その後ポーランドの数学者たちから直接に聞いたポーランドの数学史にまつわる多くの逸話を整理して理解することができた．今この本のページをめくりなおしてみると大変懐しい気持ちがする．しかし，この本に書いてあることを改めてよく見なおしてみると，二つの点で大きな不満が残る．

二つとも実は基本的には同じものと言えるかもしれないのだが，そのひとつはポーランドの数学をナチスドイツの侵略やその後の共産化で滅んでしまった過去の数学として扱かっていることで，そのナレーションが平家物語のような滅びの美学の衣をまとっていることである．日本ではポーランドと言うとショパンのピアノ曲の連想のせいか，女性的でセンチメンタルな性格の文化と理解されがちのように思えるのだが，ポーランドはむしろ，かつて 17 世紀終りのヴィーンをトルコ軍の襲撃から守ったことを誇りにしているような，たいへんに戦闘的，軍事的な文化でもある．音楽で言ったら，ショパンというより，普通の人には前衛音楽すぎて名前が知られていないかもしれないが，ルトスワフスキーの音楽の体現しているような男性的な性格の勝った文化と言えるのではないかと思う．ポーランドの数学にも当然そういった男性的な性格が現れているはずなのだが，志賀先生の [10] は，そういうポーランド文化の側面を感じることのできないものになっているように思えるのである．

この本に対するもう一つの不満は，このように，滅んでしまった過去の数学という見方を強調することに終始しているために，ポーランド学派の研究を継承として，現代に至るまで活発に研究されている数学理論があるという事実についての記述が全くないことである．しかし，実際には，かつてのポーランド学派の研究した数学は第二次世界大戦の終焉とともに終ってしまったわけではなく，それに続く研究が世界中でなされている．特にそのような研究はポーランドでは自国の数学の伝統として意識されて強く継承されている．そして，ちょうど [10] の書かれるより

少し前くらいの頃に，現代の集合論での「ポーランドの数学」は，その伝統を背景として,「実数の集合論」として地理的にもポーランドを中心に大きく開花することになるのである．

[10] にもあるように第二次世界大戦前のポーランド学派の研究の中心地はシェルピンスキーのいたワルシャワと，バナッハ，スタインハウス，クラトフスキー，ウラムなどのいたルヴフだった．第二次大戦後ルヴフ (Lwów) はソビエト連邦のウクライナ領のリヴィウ (Liviv) となり，ルヴフの大学の研究者の多くは，大戦中にナチスドイツが「要塞ブレスラウ」と呼んで戦争でほとんど廃墟になったヴロツワフ (Wrocław) の大学に移ってきた．戦後のワルシャワ大学とヴロツワフ大学は，ちょうど日本の東大と京大がそうであったような数学研究でのライバルとなった．実数の集合論の確立を決定づけることになった痩集合のイデアルと零集合のイデアルの基数不変量に関するチヒョンの図式 (Cichoń diagram) の確立をめぐっても，ほぼ同時に類似の結果に到達した当時まだワルシャワ大学に所属していたバルトシンスキー (Tomek Bartoszyński) とヴロツワフ大学のチヒョン (Jecek Cichoń) の間に熾烈な優先権争いが起こったのだった．今日では，図式自身はチヒョンの名前で呼ばれ，この図式に現れる際立って証明の難しい不等式の組がバルトシンスキーの定理と呼ばれるようになっている[3]．私がポーランドを頻繁に訪れるようになった1980年代後半には，バルトシンスキーはすでにアメリカに移住していたが，二人ともまだその当時は数学の研究をアクティヴに続けていて，特にチヒョンとはヴロツワフを訪問した折に何度も数学のディスカッションをしたし，バルトシンスキーがサバーティカルでベルリンに滞在したときには，親しく交流した．

チヒョンはその後コンピュータサイエンティストになってしまい，バルトシンスキーはNSF (アメリカ国立科学財団) の学術高官になり，数学上では，二人との交流はほとんどなくなってしまったが，バルトシンスキー氏とは今でも国際学会で時々一緒になるし個人的な交流も続いていて，一昨年，私の神戸での同僚のブレンドレ教授らが私の還暦にちなむ学会を開いてくれたときにも，トメック (バルトシンスキーのファーストネーム) は学会の海外からのゲストの一人としてこの会合に

[3] このときのワルシャワとブロツワフの対立は時に「ライバル」以上の激しいものだったようである．私は，2011 年にバルセロナで開催された国際学会 Logic Colloquium の折，バルトシンスキーやチヒョンより一つ世代が下の，それぞれ当時のワルシャワとブロツワフの研究グループのメンバーだったサクルチェフスキーとロスワノフスキーが「あの当時は色々あったがもう水にながそう」というような言葉を，しかも我々にも分る英語で，互いに交すのを目撃したことがある．これは歴史的な和解の瞬間と言えるものだったかもしれない．

参加してくれた (しかも彼は役職がらこのような会合から招待を受けることができないので，自腹での参加たっだ).

ヴロツワフ大学の数学科でのチヒョンのオフィスだった部屋は，現在はブロドゥリン=ナジェイヤ氏のオフィスになっている．ナジェイア氏とは，昨年，集合論の研究プログラムでケンブリッジに滞在したときに親しくなったのだが，ケンブリッジから帰ってきた後,「僕の部屋の棚にヤチェック (チヒョン) の置き土産で，日本語の論文の最初のページが貼ってあるんだけど，これってあなたの論文じゃないの?」というメールが写真とともに送られてきた．見てみるとたしかに大昔『数学』に投稿した私の小文 [1] だった．記憶をたどってみると，ヤチェックがこの論文の日本語を珍しがって，どこかに貼っておきたいからプリントアウトをもらいたい，と言われたことがあったのを思い出した.

今回の旅行では，Winter School のオルガナイザーの一人にもなっているブロドゥリン=ナジェイヤ氏にアレンジしてもらい，ヴロツワフ大学の数学科のゲストルーム (ゲストのために数学研究所のいくつかの部屋が宿泊可能になっている) に一泊して次の日にナジェイヤ氏や前出のリペツキ教授を含むヴロツワフからの参加者と一緒にバスとタクシーを乗りついで Winter School の開催地のヘイニッツェに向かった.

4　ウィンター・スクール

チェコの Winter School は 1973 年に発足したということである．プラハの春が 1968 年だったので，チェコスロバキアの数学も非常に難しい状況に直面していた時期だったと思われる．このあたりの歴史については，Winter School の Webpage [11] にも短い記述がある．ここ数年はヘイニッツェの International Center for Spiritual Rehabilitation という修道院を改修した研修センターのようなところで行なわれているようであるが，私が 1990 年代の初めごろに参加した Winter School はバルツァー先生がオルガナイズしていて，Srní, Harrachov, Poděbrady などの場所で開かれていた．当時の Winter School は，自由に旅行のできなかった東ヨーロッパの研究者たちの情報交換の場所ということが重要な機能の一つだった．ある年にはエルデシュがお供の人たちをたくさんつれて参加していたこともあったし．一般トポロジーの研究で有名なファン・ミル先生とも Winter School で知りあった．もちろん現在では，状況は当時とは全く違っている．主催者によると，現在の Winter

Shool では，大学院生からシニアな研究者まで広い層の数学者が世界中から参加する研究集会，ということが目指している特徴ということで，実際，参加者の間の交流を見ていると，そのような集会が理想的な形で実現しているように思われる．

集会の talks の合間の休憩時間．話をしている年配の二人はイェヒ教授 (左) とリペツキ教授 (右)． 集会のオルガナイザーのヴェルナー氏 (イエック教授の後) とチョドンスキー氏 (pc で何かタイプしている) も写っている．

今年の Winter School はカトヴィツェからの参加者は一人もいなかったのだが，それにもかかわらず全体として，ポーランドからの参加者が大きなグループをなしていた．講演を聞いていると，ポーランドとチェコの集合論や集合論的トポロジーの研究の伝統の違いの縮図ともとれるものが明瞭に感じられた．

ポーランドでは，強制法の発見の後の第 1 世代の人たちでこの手法を使いこなした数学者はたぶんほとんどいなくて，この手法を縦横に応用しだすのは，1980 年代初め以降になってからの，チヒョンやバルトシンスキーなど強制法の第二世代第三世代以降に属す人たちで，彼等の研究の中心は零イデアルや，痩集合イデアルなどと関連する，ポーランド学派の研究テーマを強く継承するものだった．

一方，今回の Winter School での多くの講演でもそうだったのだが，強制法の手法以前の，ポーランド学派の数学により直接的につながるような古典的な数学を研究している人もポーランドにはまだ依然としてたくさんいることに驚かされる．

これに対し，チェコ，特にプラハでは，強制法の理論の確立と同時あるいはその直後のごく初期に，ボピェンカのセミナーの参加者だったイェヒ，プリクリ，ブコウスキー，バルツァー，フルバチェック，シュテパネックといった，強制法の理論の第 0 世代第 1 世代の人たちによる研究が活発に行なわれていた．イェヒとプリクリは後にアメリカに移住することになるのだが，Kanamori [7] には，

> *Prikry and also Thomas Jech were originally members of Vopěnka's productive seminar, and their emigration was a Prague spring of sorts for set theory in the United States.*

という記述が見られる ([7], Chapter 4., Section 18.).

チェコの集合論研究では，この世代と若い世代の間の世代には若干時間的な不連続性があるようにも思えるが，これはその間の時代に起こった政治的な混乱に起因するものなのかもしれない．しかし，傑出した数学者が何人も出現した後，しばらく空白の時期が続く，というのはいずれにしてもよく見られるパターンでもある．

現在プラハには，Winter School のオルガナイザーのダビッド・チョドンスキー氏とジョナサン・ヴェルナー氏 (ヴェルナー氏については，昔 [2] で触れたことがあった) や，ウィーンのゲーデル研究所にも籍を置いているラデック・ホンツィック教授など，優秀な集合論の研究者が何人もいる．また，彼等より少し上の世代で，主にアメリカ大陸に活動の軸を移しているように見えるジンドリッチ・ツァプレタル教授やマイケル・フルシャック教授もプラハの出である．

しかし，これらの若い世代の数学者については，かつてアメリカや西側の諸国での集合論の研究からほとんど隔離されながら奇跡のように研究の最先端での研究成果を次々とあげていったかつてのボピェンカのセミナーのメンバーたちとは異なり，世界の研究のコミュニティーに属すチェコ出身の集合論研究者というような見方をする方がより自然かもしれない．チェコに限らず，集合論のような，コミュニティーの規模のそれほど所帯の大きくない研究分野では，特に近年国際化が進んでいるため，国や国籍の単位での発展の歴史が語りにくくなっているのではないだろうか．一方で，それにもかかわらず，国ごとの研究の環境や歴史を背景にローカルな色の違いも依然として強く残ってもいる，というのは興味深い現象と言えるかもしれない[4].

Winter School にはポーランドと開催地チェコ以外からも多くの国からの異なるジェネレーションに属す研究者や学生の参加者があった．

テュートリアルの講演者には，彼がベルリンでポスドクをしていた頃からの長いつきあいのあるヴィーン工科大学のマルティン・ゴルトシュタイン教授も含まれていた．ゴルトシュタイン教授の連続講義は，彼が昔書いたプロパー強制法の教科

---

[4] これは，メディアの強力な影響力にもかかわらず，色々な言語で異る方言が現代でも生き残っている，ということと類似の現象と言えるかもしれない．

書 [4] に書いてあることのちょっと先のテーマに関するものだった．[4] は私のところでドクター論文を書いているアンドレ・オッテンブライト君がちょうどセミナーで読んで勉強しているところだったので，マルティンがこのテーマの話をすると前もって知っていたらアンドレ君を連れてくるのだったのに，と残念に思った．そのほかにも記述集合論の標準的な教科書の著者として知られるヤニス・モスコバキス先生と，ヴィーンのゲーデル研究所の研究員ルボミア・ツドムキー氏のテュートリアル連続講義があった．

若い世代の参加者の中では，メキシコ国立自治大学の学生のオスヴァルト・グッツマン君と数学のディスカッションができたのは大きな収穫だった．今回の Winter School には，今はメキシコ国立自治大学の集合論研究グループのリーダーになっている前出のマイケル・フルシャック教授の学生たちがたくさん参加していて，グッツマン君もその中の一人だった．今回はフルシャック氏は会合に参加していなかったのだが，二年前に松江でトポロジーの国際学会があったときには，ご本人も学生をひきつれて参加していて，そのときグッツマン君のことを「あんなによくできる学生は今まで持ったことがない」と言っていたのが印象に残っていた．今回グッツマン君と議論してみて，彼のすごさがよく分った．

グッツマン君とは数学のこと以外のこともいろいろ話をしたのだが，アニメ世代の彼は「日本の文化」にどっぷりつかっていて，初音ミクのファンで，コンサートにも行ったというディープなはまり方をしていることも判明した．博士号をとった後で神戸でポスドクになることも考えている，ということなので，ぜひ良い奨学金をもらって神戸に来てほしいものである．

最近の Winter School には静岡大学の依岡輝幸氏や愛知学院大学の南裕明氏が何度か参加しているようだが，今回は日本からの参加は私のみだった．しかし，私の神戸大学での同僚のブレンドレ教授のかつてのお弟子さんで，神戸で学位を取りウイーンでポスドクをした後，今年から静岡大学に移籍したディエゴ・メヒヤ氏 (彼はチヒョンの図式のエキスパートである) や，数年前に神戸でポスドクをして最近イギリスのブリストル大学からリーズ大学に移籍したブルーク=テイラー氏，といった日本にゆかりの深い人が参加していた．

5　測度代数

上にも書いたようにイェヒ先生の連続講義は測度代数に関するものだった．

測度代数の典型的な例としては，既に述べたランダム代数がある．ランダム代数 $\mathbb{B}$ は，ボレル集合の全体の作る集合代数を零集合の全体の作るイデアルで割ることによって得られるブール代数だが，この零集合のイデアルで割るという同値関係は，ボレル集合のルベーグ測度とブール代数の演算の間の congruent な関係となっているので，ランダム代数の各要素 $a \in \mathbb{B}$ の測度 $\mu(a)$ が (a をボレル集合 A の $\mathbb{B}$ での同値類とするときに $\mu(a) = m(A)$ (ただし m はルベーグ測度) とすることで) 自然に定義できる．ここで，μ が $\mathbb{B}$ 上の測度であることは

(1) 増加的 (つまり，すべての a, $b \in \mathbb{B}$ に対し，$a \leq_{\mathbb{B}} b$ ($\Leftrightarrow a \wedge b = a$) なら $\mu(a) \leq \mu(b)$);

(2) 要素が互いに疎な有限または可算無限集合 $S \subseteq \mathbb{B}$ (つまり異なるすべての a, $b \in S$ に対し $a \wedge b$ が $\mathbb{B}$ の零元 $0_{\mathbb{B}}$ となるようなもの) に対し，$\mu(\bigvee\!\!\!\bigvee^{\mathbb{B}} S) = \sum\{\mu(a) : a \in S\}$ が成り立つ (可算加法性) [5];

(3) $\mu(1_{\mathbb{B}}) = 1$; $a \in \mathbb{B}$ で $a \neq 0_{\mathbb{B}}$ なら $\mu(a) \neq 0$; $\mu(0_{\mathbb{B}}) = 0$ となる，

という性質で特徴づけられる．このような性質を持つ測度を入れることのできる σ-完備な (つまり B のすべての可算部分集合に対しその無限和の定義できるような) ブール代数 B を測度代数とよぶ[6]．測度代数の基礎的な性質については，例えば [8] を参照されたい．

測度代数に関しては，今世紀になってから解決された,「フォン・ノイマンの問題」と，それを精密化した 「マハラムの問題」と呼ばれる二つの問題が有名である．

B を測度代数として μ を B 上の (1), (2), (3) を満たす測度とするとき，すぐにわかる二つの性質がある．一つは ccc (countable chain condition) とよばれる性質で，これは，任意の $S \subseteq B$ に対し，もし異なる $a, b \in S$ に対し常に $a \wedge b = 0_B$ となるなら S は可算である，という性質である (もし非可算な S でそのようなものがあるなら，そのうちの非可算個の $a \in S$ に対し $\mu(a) > \frac{1}{n}$ となるような n があるが，これは (2) と (3) に矛盾である)．このような $S \subseteq B$ は反鎖 (anti-chain) であるという．もう一つの性質は，弱分配性 (weak distributivity) とよばれるものである．これは，任意の極大な反鎖の列 W_n, $n \in \mathbb{N}$ に対し，有限部分集合 $E_n \subseteq W_n$, $n \in \mathbb{N}$ の列があって，$\bigvee\!\!\!\bigvee_{\ell=0}^{\infty} \bigwedge\!\!\!\bigwedge\{\bigvee\!\!\!\bigvee E_n : n \geq \ell\} = 1_B$ となることである (各 E_n を

[5]ブール代数 B と $S \subseteq B$ に対し，無限和 $\bigvee\!\!\!\bigvee^{B} S$ は $\leq_B$ に関する S 上限として (それが存在するときには) 定義される．$\bigwedge\!\!\!\bigwedge^{B} S$ も S の下限として定義される．

[6]実は測度代数はすぐ後で述べるように ccc を満たすので，単に σ-完備なだけでなく．完備になる．

$\mu(\bigvee E_n) \geq 1 - \frac{1}{2^n}$ となるようにとればよい).

フォン・ノイマンは，1937 年 (昭和 12 年) 7 月にルヴフを訪れた折に，測度代数が ccc と弱分配則を満たすことを注意した後，測度代数の代数的特徴付けを与えよ，という問題を，スコッティシュ・ブック (スコッティシュ・ブックについては [10] も参照) に記している (第 163 問[7])．この問題を解いた者への賞品として測度が > 0 のウィスキーのボトルを与える，とある．この問題はその後「ccc と弱分配則を満たす完備ブール代数は測度代数か?」 という形に再定式化されフォン・ノイマンの問題とよばれることになる．

マハラムは，測度代数の概念を弱めた，連続な偽測度を持つという条件を満たす完備ブール代数も ccc と弱分配則を満たすことを 1947 年の論文で注意している．このようなブール代数は現在ではマハラム代数と呼ばれている．

マハラムの結果から，フォン・ノイマンの問題は，

(A) すべての ccc と弱分配則を満たす σ-完備なブール代数はマハラム代数か?

(B) すべてのマハラム代数は測度代数か?

という二つの問題に分解されることになる．

(A) は 2003 年に，(独立に) バルツァー=イェヒ=パザックとヴェリチコヴィッチにより，その答が (巨大基数の存在を認めると) 集合論から独立となることが示されている．一方，(B) は通常の集合論の公理系で反例が得られることがタラグランによって 2005 年頃に示された．タラグランの結果により，再定式化されたフォン・ノイマン問題は通常の数学の枠組の中で否定的に解決されたわけである．

イェヒ先生の今回の講演は,「ccc かつ弱分配則を満たす」という条件を少し強めることで，測度代数の「代数的」特徴づけが与えられる，という，本来のフォン・ノイマン問題の肯定的な答となっているとも見ることのできる彼の結果の証明の細説だった．

フォン・ノイマン問題やマハラム問題の解決がごく最近なってからである，ということの背景には，強制法理論の進歩とその応用ということが大きく関連している．この強制法の応用については二つの側面がある．一つは

(α) 強制法を使って，ある性質を持つブール代数の存在する／しないような集合

---

[7] スコッティシュ・ブックに書いてあるオリジナルはドイツ語である．スコッティシュ・ブックの記載には，ポーランド語のものにまじって，フランス語，ロシア語，ドイツ語，英語などもあり，記入者には，このフォン・ノイマンのものを含め，当時第一線で活躍していた著名な数学者が多く含まれていて，当時のルヴフのインターナショナルな研究交流を彷彿とさせる．

論宇宙の拡張をする，

という構成の可能性であり，もう一つは，

(β) 与えられた完備ブール代数を使って強制拡大を作ったときに何が起るかを考察する，

という議論の可能性である．

(α) の例については，既にマラハム自身がスースリン木から生成される完備ブール代数が (A) の反例になることを指摘している (スースリン木の存在は集合論から独立の命題である)．(β) の典型的な例としては，完備ブール代数 B が弱分配則を満たすという性質が，B による強制拡大での，すべての $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ の関数は，ある基礎モデルでの実数によって coordinatewise に押さえられる，というもとの定義に比べてずっとその意味の分りやすい性質で特徴づけられれる，ということがあげられる．実際，この特徴付けにより，スースリン木から生成される完備ブール代数が新しい $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数を全く付加しないことから，この完備ブール代数が弱分配則を満たすことが直ちにわかる．

タラグランの作った反例も，強制法で補強された直観での議論をベースにした構成であるように思えるのだが，その強制法の視点から見たときの厳密な意味はまだ誰にもよくわかっていないようである．ヴェリチコヴィッチ氏も数年前に神戸に来たときにタラグランの構成を強制法の言葉で整理する，という試みの途中だったが，今回イェヒ先生にブワスチック教授とブール代数の本を書こうとしている，という話をしたところ「自分はタラグランの証明の細部を追ったが何が起っているのか分らなかった．本当にこれを本に書こうとしているのか?」と言われた．先に本の執筆を「大胆な計画」と呼んだのは，このことも含んでいる．

6　プラハ — tomorrow to fresh woods and pastures new

Winter School の最終日には参加者の多くはバスでプラハに移動した．私を含め何人かはプラハの科学アカデミーの宿泊施設に泊まってから帰路についた．プラハの宿泊は，チョドンスキー氏にアレンジをしていただいていたのだが，チョドンスキー氏は，プラハに着いた日に，私とテュートリアル講演者の四人を含めたメン

バーとチェコの人たちで，バルツァー先生を囲んで昼食をする，という機会もアレンジしてくれていた．

Winter School の今回のテュートリアル講演者の四人．左からモスコバキス教授，ゴルトシュタイン教授，ツドムキー教授，イェヒ教授 — Winter School 終了後にプラハにて．

しかも，会食の会場となっているレストランに行ってみると，そこには，バルツァー先生の共著者のペーター・シモン先生も参加していたし，スロバキアのコシチェからブコウスキー先生も来ていた．イェヒ先生もテュートリアル講演者の一人として食事会に参加していたので，かつてのボピェンカのセミナーの同窓会のようでもあったし，なつかしい人達一度に会うことができた．

バルツァー先生は私と会うのを楽しみにされていたようで,「Sakaé と話したいから席替えをしてくれ」と指名されて途中から隣に坐って歓談した．

バルツァー先生と筆者．隣に写っているのはペーター・シモン教授．

シューベルトの「冬の旅」の「私」は冬の荒野に踏み迷ったが，この小文を書いている「私」は，更に冬の旅を続けることになった．インターネット上の「私」で

もある藤田博司氏を松山に訪ね，ニューヨークに mathoverflow の「私」の一人でもあるジョエル・ハムキンズ教授をたずねた．今は日本数学会の学会の参加のために春めいてきたつくば市に滞在しているところである．

旅の途上で作曲をした子供の頃のモーツアルトや，ほとんど一生旅の途上で数学を研究したエルデシュには及ばないにしても，旅をして新しい風景の中で多くの数学者と議論をすると，色々な研究の発端やアイデアをつかむことができる．今回の一連の旅でも，オスバルド君との共著論文につながる議論があったし，他にもすぐに手の動きそうな問題を沢山宿題としてもらった．4 月からの年度の前半は teaching duty が重く研究科の役職も回ってきてしまったため時間の余裕がすごくないのだが，その間に研究の手がとまらないですむくらいのモメンタムは得られたのではないかと思う．

参考文献

[1] 渕野 昌，Countable Chain Condition の Variations に関するリマーク，数学，Vol.43, No.2 (1991), 174–175.

[2] 渕野 昌，ミステリー・トレイン，数学セミナー Vol.50 no.7 598 (2011), 33–39.

[3] 渕野 昌，強制法 — 現代集合論入門，準備中.

[4] Martin Goldstern, Tools for your forcing construction, in: Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), Israel Mathematics Conference Proceedings, Vol.6, Bar-Ilan University, Ramat Gan, (1993), 305–360.

[5] Thomas Jech, Set Theory, (Academic Press, 1978).

[6] Thomas Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, (Springer, 2001/2006).

[7] A. Kanamori, Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings, Corrected Second Edition, Springer Monographs in Mathematics (Springer, 2004), 日本語訳: Akihiro Kanamori, 渕野 昌 訳，The Higher Infinite（巨大基数の集合論）シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998).

[8] S. コッペルベルク (渕野 昌 訳)，現代のブール代数，(共立出版，1986).

[9] Donald Monk and Robert Bonnet (eds.), Handbook of Boolean Algebras (Vol. 1∼3), Elsevier (1989).

[10] 志賀 浩二，無限からの光芒，日本評論社，(1988).

[11] Winter School の歴史についての記述: `http://www.winterschoo.eu/history`

付録

A　1991 年の未発表原稿

以下は，1991 年 7 月の日付のある未発表の原稿である．これも数学セミナーに掲載していただこうと思って書いたものと思われるが，結局発表されることなく終ってしまっていた．この原稿の存在はまったく忘れていたのだが，古いファイルシステムの中をチヒョンの図式についての記述の検索をしていて偶然に見付けた．この作文から，Błaszczyk 氏と共著で書こうとしているモノグラフが彼の 20 年以上にわたるプロジェクトだったこと (私が共著のお誘いを受けたのは，2 年くらい前のことである) や，1990 年にカトヴィチェに滞在した経緯も今回と似たものだったことなどがわかる．

本稿の内容と重複する部分もあるが，チヒョンの図式などに関する数学的な内容についてはより充実している部分もあるし，当時の私の視点からの記述も，本稿の補足としては面白いのではないかと思い，ここに再録する．なお地名など表記が本文と一部異るものもあるが，これは当時私が使っていた表記をそのままにしたためである．

実数の集合論

A.1　無限からの光芒 – その５０年後

志賀浩二先生の「無限からの光芒」[1] は，20 世紀の前半に活躍したポーランド学派の数学者達と彼らの数学を，ポーランド史を背景にして描いた名著である．

そこでは，第一次世界大戦直後における，Fundamenta Mathematicae という名の，現在も継続して発行されている集合論，トポロジー，ロジックの専門誌の発刊が，ポーランド学派の出発の標石となったこと，彼らの数学は “「無限」からくる一条の光” に向けて進んでゆくことで，“数学史の中の一つの詩劇” というべきものをなしていること，そして，第二次世界大戦の勃発が，この詩劇に突然の終止符を打ってしまったことなどが，シェルピンスキー，シュタインハウス，クラトウスキー，バナッハ，ウラムなどの名前とともに語られている．

ワルシャワにあるシェルピンスキーの墓碑は，彼が生前に得た多くの栄誉については何も触れず，ただ,「無限の研究者」とだけ記されているということである．志賀先生は [1] のどこかで,「実無限」という言葉を使っておられたと思うが，ポーランド学派が考察の対象とした無限は，抽象的な無限集合というより，主に実数の全体の集合や，実数上の関数などに，それらの代数的，位相的な構造を併せて考えたもので，言わば数学的日常に現れる無限であった．しかし，彼らの研究結果から浮かび上がってくる「実無限」の様は，これも志賀先生が本のどこかでおっしゃっているように，我々が日常抱いている無限に対する素朴な直感から，およそ想いもよらないような，神秘をたたえたものだったのである．

志賀先生の本は，第二次世界大戦，特にナチス・ドイツがポーランドにもたらした悲惨な荒廃によるポーランド学派の終焉の記述で終わっている．しかし，ポーランド学派の数学者達によってなされた 「無限の研究」 の伝統は，ポーランド学派の事実上の消滅と共に終わってしまった訳ではない．特に，１９６０年代に開発された，強制法の理論 (forcing) という集光器を通して，無限からの光芒は，かつてのポーランド学派の人々さえも想像のつかなかったような不思議な様を見せ始めているのである．

一つの例として [1] に，第１章の定理８として引用されている，シェルピンスキーによる次の定理を考えてみよう:

定理 A.1 (シェルピンスキー)

イ) $\mathbb{R}$ の連続体濃度を持つ部分集合 N で，共通点を持たない，どの二つの N の連続体濃度の部分集合も互に位相同型とならないようなものが，存在する．

特に，イ) でのような N をとり，S と T を共通点を持たない N の連続体濃度の部分集合とすれば，任意の S と T それぞれの連続体濃度の部分集合 S', T' は互に位相同型にならないから，特に，S' と T' は順序同型でない．連続体仮説を仮定すると，$\mathbb{R}$ の部分集合 X が連続体濃度を持つことと X が非可算であることは同値になる． 従って，以上により，連続体仮説のもとでは，次の命題 ロ) が成り立つことが分かる．

ロ) $\mathbb{R}$ の，非可算部分集合 S, T で，S と T それぞれの，どの非可算部分集合 S', T' も互に順序同型とならないようなものが，存在する．

これは，大変に不思議な命題であるが，よく考えてみると，この命題の否定:

ハ) $\mathbb{R}$ の，任意の非可算部分集合 S, T に対し，S と T それぞれの，非可算部分集合 S', T' で互に順序同型となるものが，存在する．

もこれと同じくらい不思議な感じがすることに気付く．この命題の与える不思議な印象は，命題が成り立つ成り立たない，という点にかかっているというよりは，それの記述する情況が，我々の無限に関する認識の外側にある，ということなのだろうか？実は，ごく最近，トドーチェヴィッチにより，この命題 ハ) は，集合論と矛盾しないある公理のもとで証明出来ることが示された．これと，今述べた連続体仮説から ロ) が証明できることから，ロ) は，集合論から独立な命題であることが分かる．つまり，普通の集合論の公理だけからでは，この命題が正しいとも正しくないとも証明することが出来ないわけである．

この種の独立性証明は，最近の強制法の理論の進歩の結果初めて可能になったものであるが，後で述べるバルトシンスキーの定理のように，出来上がった定理の証明は一見，古典的な論法の枠組みの中でなされているように見えるものでも，実は，強制法による様々な集合論のモデルでの思考実験から得られたアイデアが重要な役割を果たしていて，１９４０年以前でなく，強制法の理論以降に得られたことが，けして偶然でない，という種類の結果も多いのである．

A.2　ポーランド

全ての国際化した今日では，勿論，ポーランド学派の無限の研究の継承を，特定の場所や一つの国だけに結び付けてしまうことはできない．たとえば，１９９１年の１月の湾岸戦争が勃発する直前，イスラエルのテル・アビブ近郊のバー・イラン大学で，「実数の集合論」と題された国際会議が開催され，私もこの会議に参加したのであるが，ここに集まってきたのは，アメリカ，ヨーロッパ，そして，イスラエルの，この分野の第一線で活躍する研究者達であった．

しかし，かつて，シェルピンスキー，シュタインハウス，クラトウスキー，バナッハ，ウラムなどの活躍したポーランドに目を向けてみると，ここでの現代数学，特に，集合論やトポロジーなどの研究分野では，かつてのポーランド学派の数学の伝統が，今なお，強く息づいていることに気付く．

実は，私は，ごく最近まで，うかつにも，ポーランドを含む東欧のスラヴ諸国に，独特の数学の研究の伝統が存続していることに気がつかないでいた．数年前，西独で学位を取った折りに，ドクター論文の defence で義務づけられている，数学の一般講演 (一般の人のための講演ではなく，他の分野の数学者にも分かるような講演) で，実数の集合論に関するテーマを選んだことがきっかけになって，この分野の勉強を始めたことや，１９９０年の１月にチェコスロバキアで毎年開催されている，「抽象的解析学のウインター・スクール」という国際会議に招待講演者として参加した折りに，多くの東欧の数学者と知り合いになったこと，また，特にポーランドについては，志賀先生の本などが契機となって，認識を新たにした次第である．

かつて，ポーランド学派のスーパースター達が議論に花を咲かせたスコティッシュ・カフェのあった街ルヴフは，現在ではソ連領になっている．戦後ルヴフで生き残ったポーランド人の多くは，ドイツが東方の最後の要塞として死守し連合軍の砲撃で廃虚となったヴ

ロッワフ (Wrocław：ドイツ名ではブレスラウ) に移り住んだ．戦後ヴロッワフ大学の数学科はシュタインハウス，クナスターらルヴフからの数学者によって再建されている． この大学は，現在，ワルシャワ大学と共にポーランドで最高レベルの大学と評価されていて，日本で言うと，さしずめ東大と京大という感じであろうか． また数学科単独で，大学教授就任資格を授与できるのは，ワルシャワ大学と，やはりワルシャワにある科学アカデミー，それに，このヴロッワフ大学のみ，ということである．

私は，このヴロッワフ大学から招待をうけて，１９９０年の１１月に，この大学の数学科の ヴェングローシュ(B. Węglorz) 教授とチヒョン (J. Cichoń) 博士の率いる集合論の研究グループの許に一週間ほど滞在した．この研究グループは，上に述べたような意味での，ポーランド学派の研究の現代的な集合論の手法による継承と言える仕事をしていて，何人もの若い優秀な数学者が，大変アクティヴに研究をしている．特に，チヒョン氏は，後に述べる“チヒョンの図式”でも知られる，この分野の第一人者である．

氏とはヴロッワフ滞在中，色々と数学のディスカッションをすることができた．スラヴ系の数学者には大酒のみが多いのだが，チヒョン氏も大変な酒豪で，ある日の夕方には彼がワインのボトルを二本持って研究室にあらわれ，じゃあちょっと数学の議論をしよう，ということになり，しばらくして気がついたときには，二人で全部飲んでしまっていたのだが，こうして私は久しぶりに大変スラヴ的な数学体験を味わったのであった．

写真 1

ヴェングローシュ氏 (右) とチヒョン氏． ヴェングローシュ氏宅のパーティにて．

ヴェングローシュ氏については，彼がモデル理論の研究をやっていたころの仕事を私の同僚の高橋 真氏が何度も論文で引用していたので，昔から名前を知っていたのであるが，日本車の愛用者で，少し前まではかなり古くなった三菱の車に乗っていた． 数年前に彼がベルリンで講演をしたことがあったのだが，その時，彼がベルリンに着いた日は週末で，運悪く私以外のロジックのグループの人たちが全員ベルリンを出払っていたため，当時私が住んでいたベルリン郊外のニコラスゼーというところのアウトバーンの出口まで迎えに行くことになった．この時が彼との初対面であったのだが，くだんの三菱に乗って現れたヴェングローシュ教授が，開口一番，君は本当に日本人なのかと聞いたのが今でも印象に残っている．今回ヴロッワフに行ってみると，彼は二ヶ月ほど前に買ったという新車のトヨタを乗り回していて，この車を大変自慢にしていた． そして，私がこの日本車に乗った最初の日本人であるとのことだった．

ヴェングローシュ氏は，研究室でカリーと呼ばれているが，本当のファーストネームはボクダンという． そのことを聞いてみると，カリーというのは子供の時からのニックネームで冒険小説の主人公の名前だということであった． ポーランドでは，研究室の中では，教授と学生の間でも，お互いにニックネームで呼びあっていて奇異な感じがするのだが，上下関係が無いわけではなく，むしろ年功序列は，かなりドライに能力主義な (西) ドイツに

比べると，日本により近いようである．また，大学の先生が就職担当を回り番ですることとか，大学の入試があることなど，ポーランドの大学の雰囲気は色々な点で日本の国立大学に似ているという印象を受けた．

今回のポーランド滞在では，この後さらに，カトビッツのシュレジア大学にブワスチック (A. Błaszczyk) 教授を訪ねた．彼の属している研究グループはどちらかというと古典的なトポロジーの問題を研究している．ブワスチック氏自身は，位相空間論からのブール代数の研究も行っていて，数年前にブール代数とブール空間の双対性に重点を置いた教科書をポーランド語で書いている． 現在その本の改訂版を今度は英語で用意している，とのことで，私はポーランド語は全くだめなので，それが出来るのを，大変楽しみにしている．１９９０年の１月にチェコでの学会で教授にお目にかかったときに，私がヴロッワフに行く予定のあることを話すと，カトビッツはヴロッワフから遠くないのでぜひ自分のところにも足を伸ばしてほしい，と言われ，その言葉にあまえたのが，今回のカトヴィッツ滞在となったわけである．ヴロッワフでもそうだったのだが，ここでも私は大変な歓待を受けた．一日は，ブワスチック教授と，彼の同僚のトゥルジャンスキー教授と三人で，カトビッツから列車で二時間弱位のところにあるクラカウに遠足をして，市内を案内して頂いた． また，ブワスチック氏にはシュタインハウスの選集を記念に頂いた．

写真 2

ブワスチック氏 (左) と彼の同僚のトゥルジャンスキー (M. Turzański) 氏．クラカウのプランティ公園にて．この公園でシュタインハウスはバナッハを “発見” した．なお，トゥルジャンスキー氏には，やはりカトビッツのクルパ (W. Kulpa) 氏と共著でスコッティシュ・ブックに問題１として載っているバナッハの問題に関連した論文がある．

現在，東欧は大きな変化の波のまっただ中にあり，ポーランドにしても，その政治経済の未来がどのようになるか，全く予想がつかない． また，色々な人と話してみると，ドイツの再統一はポーランドにとって，深刻な脅威と受けとめられていることが分かる．そのポーランドの隣国に住んでいながら，あるいは，まさにそのために，こういったポーランドの立場を正しく認識していなかったことに改めて痛感した次第である．

旅行記風に書き出すと，まだ，色々と書きたくなってしまうのだが，数学とあまり関係がないので，雑談はこの辺で終わりにすることにしたい．

A.3　測度とカテゴリー

ポーランド学派の「無限の研究」の伝統の現代における継承というような論旨で話を始めたのであるが，そこでも述べたように，ポーランド学派の研究での一つの中心主題は実

数全体 $\mathbb{R}$ の構造の研究であった． そして，彼らの研究では，測度とカテゴリーに関する考察が重要な役割を果たしていた． (ただし，ここで言うカテゴリーとは，カテゴリー理論のそれではなく，第１種 (first category) および第２種 (second category) の集合に関する議論のことである．) 測度とカテゴリーは，多くの場合，大変似た振舞をすることが知られていて，連続体仮説，あるいは，もう少し一般的に，例えば，マルティンの公理の下では，実際に，強い形の双対性が測度とカテゴリーの間に成り立っていることが知られている (定理 A.3)．また，フビニの定理とウラム – クラトウスキーの定理，コルモゴロフの０ – １則とそれに相当するベールの性質を持つ集合に関する定理など，連続体仮説などの仮定なしに集合論の枠組みの中で既に証明できるもので，測度とカテゴリーに関して対になっている定理が多く見られる．これらのことは，例えば [3] に詳しい．まず，次の定義の復習からから始めることにする:

定義 1 *a*) $\mathbb{R}$ の部分集合 X は，任意の正の実数 ε に対し，実数上の区間の族 I_n, $n \in \mathbb{N}$ で，$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ かつ，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mid I_n \mid \leq \varepsilon$ となるものが存在するときゼロ集合と呼ばれる． ここに $\mid I_n \mid$ は区間 I_n の長さを表す.
b) $\mathbb{R}$ の部分集合 X は，任意の実数上の区間 I に対し，$I \setminus X$ が空でない開区間を含むとき，全疎であるという．$\mathbb{R}$ の部分集合 X は，全疎集合の可算和として表されるとき，第１類の集合と呼ばれる．

ゼロ集合は測度の意味で小さい集合であるのに対し，第１類の集合はカテゴリーの意味で小さな集合である． なお，第１類の集合は最近の文献では meager set と呼ばれることの方が多いようである． “meager” は「痩せこけた」という意味である．

可算集合は，ゼロ集合，かつ，第１類の集合である．また，カントル集合も，ゼロ集合，かつ，第１類の集合であるような例の一つである．しかし，ゼロ集合は，必ずしも第１類の集合であるとは限らないし，逆に，第１類の集合も，必ずしもゼロ集合とは限らない:

定理 A.2 第１類の集合 M で，$\mathbb{R} \setminus M$ がゼロ集合になるようなものが存在する． 特に，M はゼロ集合ではなく，$\mathbb{R} \setminus M$ は第１類の集合でない．

上の定理での M は，カテゴリーの意味では，小さい集合だが，測度の意味では，ほとんどすべての実数を含んでいることになる．

先に，連続体仮説の仮定のもとで，ゼロ集合と第１類の集合の間に強い形の双対性が成立すると書いたが，このことは正確に言うと次のようになる :

定理 A.3 (シェルピンスキーの双対原理) 連続体仮説を仮定する． この時，全単射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $\mathbb{R}$ の部分集合 E に対し，E がゼロ集合であることと $f(E)$ が第１類の集合であることが同値になるようなものが存在する．

したがって，連続体仮説のもとでは，ゼロ集合に対し，ある命題が成り立っているとき，この情況を，上の定理の f によって “翻訳” することにより，これに対応する第１類の集合に関する命題が成り立っていることが証明できる．逆方向の “翻訳” についても同様である．

測度論では，可測集合と呼ばれる $\mathbb{R}$ の部分集合の族が考察されるが，カテゴリーで可測集合に対応するのは，ベールの性質を持つ集合である．可測集合は 可算個の $\mathbb{R}$ の閉集合の和集合ににゼロ集合を付け足して出来る集合であるが，一方，ベールの性質を持つ集合は，可算個の開集合の共通部分に第１類の集合を付け足して出来る集合である．開集合や閉集合の集合論的振舞は，比較的単純であるので，可測集合，あるいは，ベールの性質を持つ集合の全体に関する問題の研究は，多くの場合，それに対応するゼロ集合や第１類の集合に関する問題について調べることに帰着される．特に，連続体仮説が成り立っているときには，定理 A.3 により可測集合の全体とベールの性質を持つ集合の全体の性質は，たいへん似たものになる．

補題 A.4 $\mathcal{I}$ を，ゼロ集合の全体，または，第１類の集合の全体とするとき，$\mathcal{I}$ は次の条件を満たす *:*

a) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

b) $X \in \mathcal{I}, Y \subseteq X$ なら $Y \in \mathcal{I}$,

c) $X, Y \in \mathcal{I}$ なら $X \cup Y \in \mathcal{I}$,

d) $\mathbb{R} \notin \mathcal{I}$,

e) $x \in \mathbb{R}$ なら $\{x\} \in \mathcal{I}$,

f) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $X_n \in \mathcal{I}$ なら $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{I}$.

第１類の集合が *d*) を満たことは，ベールのカテゴリー定理の主張するところである．他の性質は，ゼロ集合，または，第１類の集合の定義により明かである．集合 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(S)$ が *b*), *c*) を満たすとき，$\mathcal{I}$ は S 上のイデアルと呼ばれる．

ゼロ集合の全体のイデアルと，第１類の集合の全体のイデアルを，それぞれ，$\mathbb{L}$, $\mathbb{K}$ で表すことにする．

さて，任意の集合 S 上のイデアル $\mathcal{I}$ が与えられたとき，無限基数 $add(\mathcal{I}), cov(\mathcal{I}), non(\mathcal{I})$, $cf(\mathcal{I})$ を次のように定義する:

$$add(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{K}| : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \text{ で } \cup\mathcal{K} \notin \mathcal{I}\},$$

$$cov(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{K}| : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \text{ で } \cup\mathcal{K} = S\},$$

$$non(\mathcal{I}) = min\{|X| : X \subseteq S \text{ で } X \notin \mathcal{I}\},$$

$$cf(\mathcal{I}) = min\{|\mathcal{K}| : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \text{ で，すべての } X \in \mathcal{I} \text{ に対し } X \subseteq Y \text{ となる } Y \in \mathcal{K} \text{ が存在する }\}.$$

ただし集合 U に対し $|U|$ は U の濃度を表す．イデアル $\mathcal{I}$ が与えられたとき，$add(\mathcal{I})$, $cov(\mathcal{I})$, $non(\mathcal{I})$, $cf(\mathcal{I})$ は，$\mathcal{I}$ の集合論的に重要な性質を決定する不変量と考えられるが，$\mathcal{I}$ が $\mathbb{L}$ や $\mathbb{K}$ のとき，これらの不変量がどういう値をとり得るかを調べることで，$\mathbb{L}$ や $\mathbb{K}$

のそれぞれの構造，および $\mathbb{L}$ と $\mathbb{K}$ 間に成り立つ関係に対しての，より深い理解が得られるはずである．例えば，(連続体仮説の否定が成り立っているような) ある集合論のモデルでこれらの不変量のうちどれかが，$\mathbb{L}$ と $\mathbb{K}$ で異なる値をとるなら，そこでは，上に述べた シェルピンスキーの双対定理 (定理 A.3) は成立し得ない．また，シェピンスキーの双対定理の証明を調べてみると，連続体仮説は，$add(\mathbb{L}) = add(\mathbb{K}) = 2^{\aleph_0}$ を得るために用いられているにすぎないことが分かる． したがって，この等式が成り立っていれば，定理 A.3 での f の存在が証明出来る． マルティンの公理のもとでは，この等式が成り立つことが知られているので，シェルピンスキーの双対定理が成立するためにはマルティンの公理の仮定で十分であることが分かる．(ここでは，マルティンの公理の説明は省略するが，この公理は連続体仮説の否定と矛盾しないことが知られている．また，この公理は連続体仮説のもとで成り立っている．)

以下では，$add(\mathbb{L}), ..., cf(\mathbb{L})$ (または，$add(\mathbb{K}), ..., cf(\mathbb{K})$) のことを，測度 (またはカテゴリー) に関する基数不変量と呼ぶことにしよう．これらの基数不変量が，実際，ゼロ集合や第１類の集合のみでなく，可測集合あるいはベールの性質を持つ集合の全体に対する重要な不変量になっていることは，例えば，次のような定理により分かる．

定理 A.5 *a)*

$$add(\mathbb{L}) = min\{|\,\mathcal{K}\,| : \begin{array}{l} \mathcal{K} \text{ は可測集合の族だが} \\ \bigcup\mathcal{K} \text{ は可測でない} \end{array}\}.$$

b)

$$cov(\mathbb{L}) = min\{|\,\mathcal{K}\,| : \begin{array}{l} \mathcal{K} \text{ は可測集合の族で} \bigcup\mathcal{K} \text{ も} \\ \text{可測となるが,} \mu(\bigcup\mathcal{K}) \neq \sum_{X\in\mathcal{K}} \mu(X) \end{array}\}.$$

ここに，可測集合 X に対し，$\mu(X)$ で X のルベーグ測度を表す．また，

$$\sum_{X\in\mathcal{K}} \mu(X) = max\{\mu(\bigcup\mathcal{K}') : \mathcal{K}' \text{ は } \mathcal{K} \text{ の有限部分集合}\}$$

である．

c)

$$add(\mathbb{K}) = min\{|\,\mathcal{K}\,| : \begin{array}{l} \mathcal{K} \text{ はベールの性質を持つ集合の族だが} \\ \bigcup\mathcal{K} \text{ はベールの性質を持たない} \end{array}\}.$$

A.4 チヒョンの図式

前節で定義した測度とカテゴリーに関する基数不変量の大きさは，集合論の公理だけからは完全に決定できない．しかし，これらの基数不変量の間には，いくつかの不等式が成り立つことが知られている． これらの不等式をダイアグラムとして纏めたものは，第２節

で触れたチヒョン氏にちなんで，チヒョンの図式と呼ばれている．本節では，この図式について述べる．

先ず，$add(\mathcal{I})$, $cov(\mathcal{I})$, $non(\mathcal{I})$, $cf(\mathcal{I})$ の間で殆ど自明に成り立つ以下の不等式を証明する:

補題 A.6 $\mathcal{I}$ をある集合 S 上のイデアルで，補題 *A.4* の $d)$, $e)$ に対応する

$d')$ $S \notin \mathcal{I}$,

$e')$ $x \in S$ なら $\{x\} \in \mathcal{I}$

を満たすものとする． このとき，

ア) $add(\mathcal{I}) \leq cov(\mathcal{I})$,

イ) $add(\mathcal{I}) \leq non(\mathcal{I})$,

ウ) $cov(\mathcal{I}) \leq cf(\mathcal{I})$,

エ) $non(\mathcal{I}) \leq cf(\mathcal{I})$,

が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & cf(\mathcal{I}) & \\
cov(\mathcal{I}) \arrow[ur] & & non(\mathcal{I}) \arrow[ul] \\
 & add(\mathcal{I}) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

図 1

証明 ア): $\kappa \geq cov(\mathcal{I})$ とすれば，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ で，$\mid \mathcal{K} \mid \leq \kappa$ かつ $\bigcup \mathcal{K} = S$ となるものが存在する．したがって，$d')$ により，$\bigcup \mathcal{K} \notin \mathcal{I}$ となるから，$\kappa \geq add(\mathcal{I})$ である．
イ): $\kappa \geq non(\mathcal{I})$ とすれば，$X \subseteq S$ で，$\mid X \mid \leq \kappa$ かつ $X \notin \mathcal{I}$ となるものが存在する． このとき $\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$ とすれば，$e')$ により，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ で $\bigcup \mathcal{K} = X \notin \mathcal{I}$ となるので，$\kappa \geq add(\mathcal{I})$ である．
ウ) $\kappa \geq cf(\mathcal{I})$ とすれば，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ で，$\mid \mathcal{K} \mid \leq \kappa$ かつ ，すべての $X \in \mathcal{I}$ に対し $X \subseteq Y$ となる $Y \in \mathcal{K}$ が存在するようなものがある． 特に，e' により，$\bigcup \mathcal{K} = S$ となるから，$\kappa \geq cov(\mathcal{I})$ である．
エ) $\kappa \geq cf(\mathcal{I})$ として，$\mathcal{K}$ を ウ) でのようにとる．各 $Y \in \mathcal{K}$ に対し $c_Y \in S \setminus Y$ を任意に

とる．これは，d') により可能である．$X = \{c_Y : Y \in \mathcal{K}\}$ とすれば，$|X| \leq \kappa$ となるが，$X \notin \mathcal{I}$ である: もしも，$X \in \mathcal{I}$ だったとすれば，$\mathcal{K}$ の元 Y で，$X \subseteq Y$ となるものが存在するが，$c_Y \notin Y$ だったから，$c_Y \notin X$ となり，X の定義に矛盾するからである． したがって，$\kappa \geq non(\mathcal{I})$ となる．

□**(補題 A.6)**

次に，$\mathcal{I}$ が $\mathbb{L}$ か $\mathbb{K}$ であるときに，上記の不変量がどのくらいの大きさをとり得るかを考えてみよう:

定理 A.7 $\mathcal{I}$ を $\mathbb{L}$ あるいは，$\mathbb{K}$ とする．このとき，

$$\aleph_1 \leq add(\mathcal{I}), cov(\mathcal{I}), non(\mathcal{I}), cf(\mathcal{I}) \leq 2^{\aleph_0}$$

が成立する．

証明 補題 A.6 により，$(*)$ $\aleph_1 \leq add(\mathcal{I})$ と，$(**)$ $cf(\mathcal{I}) \leq 2^{\aleph_0}$ が示せればよい． $(*)$ は，補題 A.4 の f) により，成り立つ． $(**)$ を示すには，

$$\mathcal{K}_1 = \{G \subseteq \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \text{ はゼロ集合で，可算個の} \\ \text{開集合の共通部分の形に書ける } \}, \end{array}$$

$$\mathcal{K}_2 = \{F \subseteq \mathbb{R} : \begin{array}{l} F \text{ は第１類の集合で，可算個の} \\ \text{全疎な閉集合の和の形に書ける } \} \end{array}$$

を考えれば，これらの集合は，それぞれ $\mathcal{I} = \mathbb{L}$ と $\mathcal{I} = \mathbb{K}$ のときの，$cf(\mathcal{I})$ の定義での $\mathcal{K}$ の性質を満たしているが，$|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| = 2^{\aleph_0}$ だから，$(**)$ が成り立つことが分かる．
□**(定理 A.7)**

連続体仮説は，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ だったから，上の定理から次の系が直ちに得られる．

系 A.8 連続体仮説のもとでは，$\mathcal{I}$ を $\mathbb{L}$ あるいは $\mathbb{K}$ としたとき，

$$add(\mathcal{I}) = cov(\mathcal{I}) = non(\mathcal{I}) = cf(\mathcal{I}) = 2^{\aleph_0}$$

が成り立つ．

第１節で述べたように，上の等式は，より一般的には，マルティンの公理の仮定から導ける．

上に述べたいくつかの不等式以外で，強制法の理論以前の集合論で知られていた事実としては，ロートベルガー (F.Rothberger) の１９３８年の論文で証明されている，$cov(\mathbb{L}) \leq non(\mathbb{K})$, $cov(\mathbb{K}) \leq non(\mathbb{L})$ がある．証明はそれほど難しくはないのだが，ここでは割愛する．なお，この証明では，先に述べた，定理 A.2 が巧妙に用いられている．

このロートベルガーの仕事に続く決定的な展開は，１９８０年代になってから，ようやくなされることになる．１９８４年に発表された論文で，バルトシンスキー (T. Bartoszyński) は，$add(\mathbb{L}) \leq add(\mathbb{K})$ を証明したのである．

この結果に先だって，ミラー (A. M. Miller) は，$add(\mathbb{L})$ etc. の基数不変量が，強制法によって得られる種々の集合論のモデルの中で，どういう値を取るかを，詳しく調べているが，第１節でも，触れたように，バルトシンスキーの証明は，これらの集合論のモデルでの思考実験の結果を吟味することによって，得れたと思われる． また，バルトチンスキーの定理と双対的な証明により，$cf(\mathbb{K}) \leq cf(\mathbb{L})$ が示される．

上記の不等式を含む基数不変量間の関係をまとめたダイアグラムは，チヒョンの図式と呼ばれている．

なお，ミラー教授は，京都での国際数学者会議の数理論理学の分科会で，上で述べた基数不変量に関連する最近の結果について講演され，その折に，チヒョンの図式についても話されている．読者の中には，この講演を聴かれた方も居られるのではないかと思う．

チヒョンの図式には，前節で定義した，基数不変量の他に，次に定義する二つの基数 b, d が，含まれている．$\mathcal{N}$ を自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ から，$\mathbb{N}$ への写像の全体として，$f, g \in \mathcal{N}$ の間の関係 $f \leq^* g$ を次のように定義する:

$$f \leq^* g \Leftrightarrow$$

$f(n) \leq g(n)$ が高々有限個の反例を除くとすべての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ

$(\mathcal{N}, \leq^*)$ に関する基数不変量 b, d を次のように定義する:

$$\begin{aligned} b = min\{\mid X \mid : \quad & X \subseteq \mathcal{N} \text{ で，すべての } f \in \mathcal{N} \text{ に対し，} g \in X \text{ で} \\ & g \not\leq^* f \text{ となるものが存在する} \quad \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = min\{\mid X \mid : \quad & X \subseteq \mathcal{N} \text{ で，すべての } f \in \mathcal{N} \text{ に対し，} g \in X \text{ で} \\ & f \leq^* g \text{ となるものが存在する} \quad \}. \end{aligned}$$

b と d は，それぞれ “(un-)bounded”, “dominating” の頭文字である．定義から，$b \leq d$ である．

以上で定義された基数不変量に対しチヒョンの図式は以下のようになる:

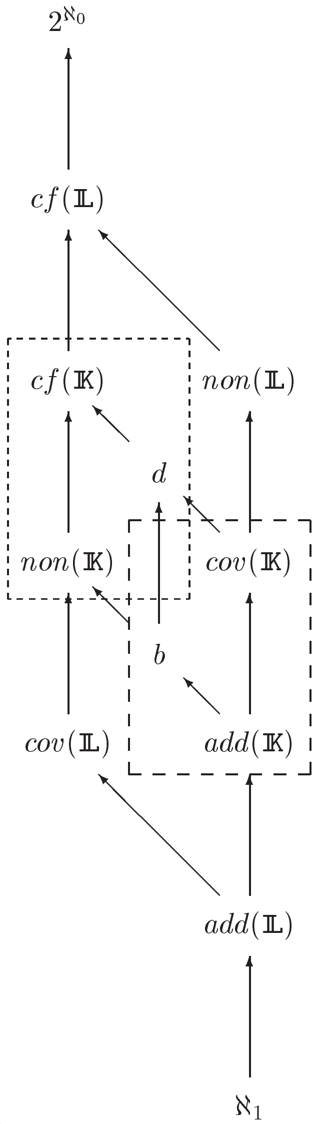

図 2

ただし，基数不変量 κ, λ に対し，$\kappa \longrightarrow \lambda$ は，不等式 $\kappa \leq \lambda$ を表している．また，破線で囲った部分については,

$$\begin{aligned} add(\mathbb{K}) &= min\{b, cov(\mathbb{K})\} \\ cf(\mathbb{K}) &= max\{d, non(\mathbb{K})\} \end{aligned}$$

という等式が成り立っている．

この図式が通常の集合論から導くことのできる基数不変量の間の関係すべてを網羅しているかどうか，という問題は，まだ完全には解決されていない[8]．また，連続体の濃度が非

[8][2016 年に補足したリマーク]: これらの基数不変量と抵触しないような任意の正則基数の割りふりが可能かどうか? ということについては，現在でも多くの未解決問題が残っている．本文で名

常に大きいことを仮定したとき，基数不変量の共終数がどのようなものになるか，ということに関しては多くの問題が未解決である．連続体の濃度を $\aleph_2$ とするとき，これらの基数不変量の値の組合せで，上のチヒョンの図式での制約と抵触しないものは，全部で２３個あることが容易に分かる．

写真 3

基数不変量の２３の可能性を示す表 — ヴェングローシュ教授とチヒョン博士の研究室のドアに貼ってあったもの．

バルトシンスキー，ユダ (H. Judah)，シェラ (S. Shelah) は，ごく最近，これらのうち，実際に可能かどうかが知られていなかった組合せのそれぞれに対し，それの成り立っているような集合論のモデルを構成することで，連続体の濃度が $\aleph_2$ の場合には，既にチヒョンの図式によって，基数不変量間の関係がすべて網羅されていることを証明した．

ここでの各モデルの構成法を比較してみると，強い対称性を持った関係が見えてくるが，このことは，集合論の枠組内に既に隠されている，測度とカテゴリーの間のある種の双対性を示唆するものであるように思える．

上記のような議論をさらに進めて行くことで，測度とカテゴリーに関する，より深い認識が得られることを期待したい．

参考文献

[1] 志賀 浩二 ; 無限からの光芒，日本評論社，1988.

[2] D. H. Fremlin ; Cichoń’s diagram, Séminaire Initiation à l’Analyse, 1983/84 N^o 5.

[3] J. C. Oxtoby ; Measure and Category, Springer-Verlag, 1980.

前の出た私の同僚のブレンドレ氏や静岡大学のメヒア氏は，この方向の研究の第一人者である．