目 次

この文章は「ゲーデルと20世紀の論理学 第４巻」（東京大学出版会，2007）の，渕野 昌の執筆した第I部です．

ただし，2009年の後期以降に神戸大学で大学院の講義でテキストとして用いた際に見つけた typos などの訂正などの update が施されているため，上記の本とは多少異なるものになっているところもあります．

(平成 27 年 5 月 11 日)

第 I 部
構成的集合と公理的集合論入門

集合論は代数や幾何といった数千年の歴史を持つ他の数学の分野と比べて非常に新しい研究分野である．しかも，その始まりはカントル (Georg Cantor 1845 - 1918) という 1 人の数学者によって，何もないところから成熟した研究分野として一気呵成に確立される，という他の数学の分野では見られない劇的な始まり方をしている．

だが，集合論は研究分野として確立された後，平穏に着々と発展を遂げたわけではなかった: 20 世紀の初頭には，集合論の論法として用いられていたものと殆ど区別のつかないいくつかの推論により矛盾する結果が導き出せることが発見された．ラッセルのパラドックス，ブラリ＝フォルティのパラドックス，カントルのパラドックスなどがそれである[1]．20 世紀初頭は全数学が集合論の上で展開できることが認識されはじめた時期でもあったので，これらの逆説(パラドックス)は「数学の危機」として認識されることになったのである．この「危機」を乗りこえるために，集合論で認容される論法を明確化することが早急の課題となり，集合論の公理系が整備されることになった（1.1 節を参照）．現在では，集合論は，1.2 節で述べるような公理系上の理論としてとらえられている．

集合論の成立の発端の一つは，カントルによる実数の全体の集合の非可算性（つまり実数の全体が自然数の全体と一対一に対応づけられないこと）の発見（1873 年）であったが，実数の全体の集合と自然数の全体の集合のサイズの間には他の無限集合のサイズが存在しないことを主張する連続体仮説（2.7 節を参照）は，カントルの死後に未解決問題として残された．この問題の解決は，ゲーデルとコーエンの登場を待たなければならなかった．しかもここでの “解決” は，連続体仮説が集合論の公理系から独立である，ということの証明として得られており，ゲーデルの不完全性定理によって明らかになった，数学の不完全性，という数学をとりまく深淵を垣間見させる最初の数学的な例の一つとなったのである．この経緯は，もう少し詳しく述べると，次のようなものであった: ゲーデルは 1930 年代に選択公理と一般連続体仮説の集合論の他の公理からの無矛盾性を証明している（[Gödel 1938, 1940] —

1)　ラッセルのパラドックスについては，p.23 を参照されたい．

定理 4.9（p.108）を参照）[2]．さらに 1960 年代になると，コーエン (Paul Cohen 1934 –) は，強制法を導入し，これを用いて選択公理と連続体仮説の集合論の他の公理からの独立性を証明した（[Cohen 1963,1964] — 定理 4.17（p.118）を参照）．

ゲーデルとコーエンによるこれらの仕事は，連続体仮説の独立性の証明ということに留まらず，20 世紀後半の集合論の研究全体の方向を決定づけるものとなった（本書の第 I 部の後半および第 II 部を参照）．さらに，[Gödel 1947/64] などで表明されているゲーデルの集合論に対する哲学的立場は，21 世紀の集合論の研究の上にも大きな影を投げかけていると言えよう[3]．

本書の第 I 部では，公理的集合論を導入し，ゲーデルの構成的集合の理論および強制法の理論について述べる．とくに第 1 章と第 2 章は，それ以降の章や第 II 部と異なり，入門書ないし教科書風である．執筆にあたっては，できるかぎり自己完結した記述になることを目指したが，紙数の制限上，第 3 章の一部と第 4 章に証明の細部の記述など，スケッチ風になっている個所が若干ある．そのような個所でも，聡明な読者は自力で細部の再現が可能であることを期待するが，子細については，必要なら [Kunen 1980], [Jech 1978/2003] なども参照されたい．

上で「教科書風」と書いたが，ここで，本書第 I 部が，本シリーズの趣向を多少逸脱して，そのようないささか「堅い」書き方になっていることに対する弁明をしておきたいと思う．

本書を見ても分るように，集合論の研究結果では，“無限”，“絶対”，“宇宙” など，神学的ないし神秘主義的な響きを持つ用語や概念がきわめて頻繁に用いられることになる．そのため，直観に訴える「お話」的説明に終始したときに，集合論を新興宗教の教義のようなものととり違える人が多く出てきてしまうのではないかと恐れるのである．江戸時代の日本には「珠算の達人が蔵の前でそろばんをはたいたら蔵がひとりでにあいた」というような類の都

2) ゲーデル全集 [Feferman et al 1995] の第 I 巻によると，選択公理の無矛盾性は 1935 年，連続体仮説のそれは 1937 年 6 月になされている，ということである．なお，選択公理と，連続体仮説および一般連続体仮説については，それぞれ 1.1 節と 2.7 節を参照.

3) 本書第 II 部の第 1 章では，[Gödel 1947/64] に表明されたゲーデルの集合論に関する思想や研究指針（ゲーデルのプログラム）について考察されている．

市伝説（？）が流布したことがあったという話をどこかで聞いたことがある．これは昔の話であるが，現代においても，難しいものに神秘を求める性向のある，ある種の人々においては，現代数学も迷信の対象となってしまう危険性を十二分に孕んでいるようである．集合論に関して言うと，このような状況は，さらに具合の悪いものになっているように思える．集合論は，他の現代的な数学理論と同様，非数学者から擬似宗教のようなものとしての身に覚えのない扱いを受けてしまう危険性に曝されているだけでなく，“プロの” 数学者からも，ある種の新興宗教のような「胡散臭い密議」というような（間違った）印象を持たれてしまっている場合が少なくないのではないかと思われる節すらあるからである．しかも，近代的，現代的な集合論は（少なくとも日本では）大学の数学科の正規の講義では全く教えられることがない，という事情が，この傾向に拍車をかけているように思われる．このような状況をふまえ，少なくとも集合論の基礎的な部分に関しては，本書においても技術的な細部を含むきちんとした記述がぜひとも必要であろうと考えた次第である．

ゲーデルは，とくに晩年，数学=集合論の（プラトン的な理想界での）実存を信じる，という立場を強く持っていたようである．このことは，本書第 II 部第 1 章でのゲーデルによる [Gödel 1947/64] の分析や，第 III 部において，詳しく論じられることになる．しかし，まさにこの [Gödel 1947/64] のような，数学理論の哲学的な肉付けにおける肉付けの部分のみを解説した文章を，技術的細部をともなったその数学的な実体についての基礎知識なしに読んだ場合，これをオカルト的・擬似哲学的な文章と区別することは非常に難しいのではないかと思う．

紙数の制限もあり，第 II 部の第 2 章以降の記述は，技術的細部には触れない解説文的なものとなっているようであるが，本書第 I 部での比較的きちんとした “教科書風” の記述は，第 II 部での議論の背後にある数学的な実体がどのようなものかを推し量ることができるために必要と思われる，最低線の基礎知識を提供するものとなることを目指しているものでもある．

第 I 部の原稿は複数の方々に試読していただき，多くの有用な意見をいただいた．とくに，(第 I 部を執筆した 2005 年当時）名古屋大学大学院情報科

学研究科博士課程前期課程在学中だった池上大祐氏，神戸大学自然科学研究科の依岡輝幸氏，また本シリーズ第 1 巻の著者の一人でもある田中尚夫先生には，原稿の細部にわたって多くの示唆をいただいた．予定を大幅に超過した紙数の関係もあり，すべての指摘をテキストに反映することはできなかったが，これらの方々の多数の指摘のおかげで，誤殖の他，著者のいくつかの思い違いも正すことができ，可読性についても大いに改善することができたと思う．ここに感謝の意を表したい．

第1章

公理的集合論

本章では，公理的集合論の体系 ZFC を導入し，この体系で展開される数学のごく基礎的な部分について検証する．集合論の体系は，まず 1.1 節で “素朴な” やり方で導入された後，1.2 節で，形式化された厳密な体系として再導入される．

1.3 節では，クラスも対象として扱えるような集合論の定式化である体系 BGC を定義し，ZFC との関係について述べる．

BGC は，ベルナイス (Paul Bernays, 1888–1977) によって導入された体系で，[Gödel 1940] では構成的集合の理論の枠組として用いられているが，1.3 節でも見ることになるように，その集合に関する部分は ZFC と全く同等であることが知られており，[Gödel 1940] での議論も，ZFC ですべて問題なく行なうことができる．

1.1　ツェルメロ=フレンケル集合論

以下で述べる公理系は，ツェルメロ (Ernst Zermelo, 1871–1953) により定式化され，フレンケル (Abraham Fraenkel, 1891–1965) によりさらに拡張されて得られた体系に基づくもので，ZFC （英語読みでは “`zi:efsi:`”）とよばれている．‘Z’ と ‘F’ はこの 2 人の頭文字で，最後の ‘C’ は選択公理 (Axiom of Choice) を表している．これに対し，ZFC から選択公理を除いた

体系は ZF と呼ばれる．

公理的集合論では，考察の対象はすべて集合である，と考える．したがって，以下で「ある x について ...」と言ったときには，「ある集合 x について ...」という意味である．

集合論では，対象の集まりかたのみが問題となる．そこで，２つの集合 a, b に対して「a が b の要素である」という帰属関係を唯一の基本的な述語として採用する．この関係を “$a \in b$” と表わす．他の述語はすべて帰属関係（および，より基本的な同等関係 “$=$”）のみを使って定義される．$a \in b$ のとき a は b の元（げん）である，という言い方もする．先程,「集合論の考察の対象はすべて集合である」と述べたが，とくに集合の要素もまた何らかの集合であると考えていることに注意する．

集合論の公理系の一番最初の公理は，すべての集合はその要素の全体から一意に決まることを主張する次のものである：

（外延性公理）　任意の x, y に対し，すべての z で，$z \in x$ と $z \in y$ が同値になるなら，$x = y$ である．

ZFC の他の公理は，すべて,「集合 $x_1, x_2, \ldots$ が与えられたとき，これらから ... という性質を持つ集合を作ることができる」というタイプの主張（存在公理）となっている．

（空集合公理）　要素を一つも持たないような集合が存在する．

外延性公理により，要素を一つも持たない集合は存在すれば一意である．この一意に決まるところの，要素を一つも持たないような集合を $\emptyset$ で表し，空集合とよぶ．

（対の公理）　任意の x, y に対し，x と y だけを要素として持つような z が存在する．

対の公理でその存在の保証された（これも外延性の公理により一意に決まるところの）集合 z を $\{x,y\}$ と表わす．とくに $x = y$ のときには，これを $\{x\}$ と書く．$\{x\}$ は「シングルトン x」とよばれることもある．対の公理を用いて２つの集合 x, y の順序対を，$\{\{x\},\{x,y\}\}$ として導入することがで

きる．x, y の順序対も，この定義により一意に決まるので，これを (x, y) と書く．集合論の最近の文献では，$\langle x, y\rangle$ という記号を用いることも多い．ここでも順序対には $\langle x, y\rangle$ の記法を用いることにする．順序対の定義は，必ずしもこれでなくてもよいのであるが，要点は，

$$(1.1) \quad \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad x = x' \text{ かつ } y = y'$$

という同値関係が成り立つことである．これに対し，$\{x, y\} = \{y, x\}$ だから，$\{x, y\}$ に対しては (1.1) に対応する性質は成立たない．

（和集合の公理）　任意の x に対し，集合 y で，任意の z が y の元であることと，ある $u \in x$ が存在して $z \in u$ となることが同値になるようなものが存在する．

この公理は x を集合族とみて，その和集合 y の存在を主張している（我々の立場ではすべての集合は集合からなるので，集合と集合族の区別はないのであるが，要素を集合として扱っていることを強調するために「集合族」という言葉を使うこともある）．上のような y を $\bigcup x$ と表し，集合（族）x の和集合とよぶ．

特に，$x = \{v, w\}$ のときには，上の公理での y は v と w の通常の意味での和集合 $v \cup w$ となる．

φ を集合に関する性質とするとき，次の公理を考える[1]．

（分出公理）$_\varphi$　$x_1, \ldots, x_n$ を固定するとき，任意の x に対し，x の元 z で $\varphi(z, x_1, \ldots x_n)$ を満たすようなものの全体からなる集合 y が存在する．

上のような y は やはり φ と $x_1, \ldots x_n$ が与えられると一意に確定する．そこでこれを

$$y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \ldots x_n)\}$$

と表わす．

1)　ここで用いた「集合に関する性質」という言い回しは，曖昧で，さらに明確化されるべきものである．このことについては後で再びコメントする．

分出公理の応用として，例えば，x と y を集合とするとき，x と y の差集合

$$x \setminus y = \{z \in x : z \notin y\}$$

が存在することがわかる．また，x を空でない集合（族）とするとき，x の共通部分 $\bigcap x = \{z :$ すべての $y \in x$ に対し $z \in y\}$ も存在することがわかる：y_0 を x の一つの元とするとき，

$$\bigcap x = \{z \in y_0 : \text{すべての } y \in x \text{ に対し } z \in y\}$$

と表わせるが，分出公理により，このような集合の存在は保証されるからである．

（無限公理）　集合 x で空集合を元として含み，すべての $y \in x$ に対し，$y \cup \{y\} \in x$ となるようなものが存在する．

上のような集合 x は，無限公理の前半の仮定により $\emptyset \in x$ だから，無限公理の後半により，$\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$, ... となり，直観的には x は無限個の元を含むものとなることがわかる．集合論では，自然数 0, 1, 2, ... を，それぞれ $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... のこととして導入する[2)]．したがって，無限公理で存在の保証された集合 x は 0, 1, 2,... のすべてを含むものとなっている．そこで，このような x と分出公理を用いると，自然数の全体からなる集合

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

の存在が証明できる[3)]．

集合 x が集合 y の部分集合であるとは，すべての z に対し，$z \in x$ なら $z \in y$ が成り立つこととし，これを $x \subseteq y$ で表わす．たとえば，分出公理での $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \dots x_n)\}$ は x の部分集合である．

2)　$0 = \emptyset$, $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}$ となっていることに注意する．順序対のときと同様に，0, 1, 2,... が具体的にはどのような集合として導入されているかはあまり重要ではない．ただし，ここでのように自然数を導入すると，自然数や無限順序数の理論が統一的かつ自然に展開できることが知られている（第 2 章を参照）．そのため，現代の集合論では，ここでの定義は広く用いられている．

3)　詳細については，p.48 を参照．

（べき集合の公理）　任意の x に対し，そのべき集合が存在する．つまり，集合 y で，すべての z に対し $z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$ となるようなものが存在する．

集合 x のべき集合を $\mathcal{P}(x)$ と表わす．先ほど自然数の全体 $\mathbb{N}$ が集合としてとらえられることを見たが，たとえば，$\mathbb{N}$ の部分集合を実数の二進表示と対応づけて考えることにより（たとえば $X \subseteq \mathbb{N}$ で $2n+1$ が X の要素となっているときには X に対応する実数の二進表示での小数点以下 n 桁目の数字は 1 とする，などと決めることで），上の公理でその存在の保証された集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$（の適当な部分集合）から，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を，ここでの公理的集合論の枠組の中で構成することができることになる．

さきほどの順序対を思い出してみると，集合 a, b に対し，$x \in a, y \in b$ なら，$\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ となる．したがって，べき集合の公理と分出公理を用いると，

$$
\begin{aligned}
a \times b &= \{\langle x, y\rangle : x \in a,\, y \in b\} \\
&= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) : x \in a,\, y \in b\}
\end{aligned}
$$

として a と b の直積（デカルト積）の存在が示せる．これにより，たとえば，集合 $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \ldots$ などが集合論の中で扱える．また集合 a から集合 b への関数も，グラフ $f \subseteq a \times b$ として扱うことができる．つまり，$f \subseteq a \times b$ が a から b への関数（または写像）[4]である，とは，

(1.2)　すべての $x \in a$ に対し，$\langle x, y\rangle \in f$ となるような $y \in b$ がちょうど１つ存在する

こととして定義するわけである． f が a から b への関数のとき，これを $f : a \to b$ と書く．また，$x \in a$ なら $\langle x, y\rangle \in f$ となるような $y \in b$ は (1.2) により一意に決まるが，このような y を $f(x)$ と表わす．関数 $f : a \to b$ に対し，集合 a は (1.2) により一意に決まるが，これを $dom(f)$ で表し f の定義

4)　「関数」と「写像」という用語は本稿では区別せずに同意語として用いることにする．

域とよぶ．また,「f は a 上の関数である」，という言い方もする．$f : a \to b$ で $c \subseteq a$ のとき，分出公理により

$$\{y \in b : f(x) = y \text{ となる } x \in c \text{ が存在する }\}$$

という集合が存在するが，この集合を c の f による像とよぶ．c の f による像は $f[c]$ と表されることも多いが，ここでは，[Gödel 1940] でも採用されている $f''c$ という記法で表わすことにする．$f : a \to b$ のとき，任意の集合 X に対し，$f \restriction X = f \cap (X \times b)$ とする．$f \restriction X$ は，関数 f の X への（より正確には $a \cap X$ への）制限である．

分出公理により，${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : f \text{ は } \mathbb{R} \text{ から } \mathbb{R} \text{ への関数 }\}$ や，$C(\mathbb{R}) = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f \text{ は } \mathbb{R} \text{ から } \mathbb{R} \text{ への連続関数 }\}$ などといった集合の存在も示せる[5)]．2.3 節で述べることになる数学的帰納法により，$\mathbb{N}$ 上には加法や乗法など算術的な構造を導入することができ，これらを $\mathbb{R}$ に拡張することにより，$\mathbb{R}$ の実数体としての構造が集合として規定できる．さらに，$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 等に関する数学で用いられるすべての基本性質は，後出の ZFC の言語 $\mathcal{L}_\in$ 上の論理式に翻訳でき，これらはすべて，ZFC から形式的に証明することができることになる[6)]．

このように続けることで，我々が日常の数学で必要となる数学的対象は，すべて公理的集合論の枠組の中で扱えるようになる．ここでは勿論そのような展開をすべて示すだけの余裕はないが，以下で記号列と集合族の集合論での扱いについて，いくつか注意をしておくことにする．まず，集合 $x_0, x_1 \ldots,$ x_{n-1} に対し，これらからなる n-組 $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ を

$$(1.3)\qquad \underbrace{\langle\langle\cdots\langle}_{n-1\text{ 個}} x_0, x_1\rangle, x_2\rangle, \cdots\rangle, x_{n-1}\rangle$$

のことととして導入する．たとえば，$n = 3$ のときには，

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle = \langle\langle x_0, x_1\rangle, x_2\rangle$$

5)　より一般的には，A と B が集合のとき ${}^{B}A = \{f : f : B \to A\}$ も集合となる．

6)　p.21 で導入することになる用語を用いると，これは，数学で証明できる命題の $\mathcal{L}_\in$ への翻訳を φ とすると，$ZFC \vdash \varphi$ が示せるということである．

である．このように導入された n-組が，(1.1) に対応する性質を持つことは容易に示せる．X の要素の n-組の全体からなる集合を X^n と表わす．X^n が実際に集合となることは，直積が集合となることの証明と同様に示せる．集合の n-組 $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ は，$n = \{0, \ldots, n-1\}$ から $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ への写像

(1.4) $\{\langle 0, x_0\rangle, \langle 1, x_1\rangle, \ldots, \langle n-1, x_{n-1}\rangle\}$

と同一視されることもある．この同一視により，集合 X の元の有限組の全体 $X^{<\omega}$ が

$$X^{<\omega} = \{f : \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ に対し，} \quad f : n \to X\}$$

として定義できる[7]．有限列 s を関数ととらえたとき，$dom(f)$ はある自然数 $n = \{0, \ldots, n-1\}$ となるが，これを $\ell(s)$ とも表わす．$\ell(s)$ は有限列 s の長さである．また $m < \ell(s)$ に対し，$s \restriction m$ を s の $m = \{0, \ldots, m-1\}$ への制限とする．つまり，s が $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$ のとき，$s \restriction m = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}\rangle$ である．

ある集合が有限列であることを強調したいときには，その集合をベクトル記号 $\vec{a}, \vec{x}, \ldots$ などで表わすこともある．

ある集合 S の要素を記号とみなすとき，S の要素 s_0, s_1,..., s_{n-1} を並べた記号列 “$\mathrm{s}_0\mathrm{s}_1\cdots\mathrm{s}_{n-1}$” を考察することが必要となることがある．このようなときには，S^n の元，$\langle \mathrm{s}_0, \mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_{n-1}\rangle$ をこのような記号列とみなすことにする．

f を集合 I 上の関数とするとき，$i \in I$ に対し $X_i = f(i)$ と置き，f を集合族 $(X_i)_{i\in I}$ とみなすことができる．このとき，$\bigcup_{i\in I} X_i$ と $\bigcap_{i\in I} X_i$ をそれぞれ，

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup\{f(i) : i \in I\}, \quad \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap\{f(i) : i \in I\}$$

7) 2.3 節で述べられることになるように，“ω” は 順序数としてとらえたときの $\mathbb{N}$ を表わす記号である．ちなみに，(1.3) での n は集合論の外側の「本物の」具体的な自然数 n であるのに対し，(1.4) での n は集合論の中の $\mathbb{N}$ の元としての n でありえることに注意しておく．

により定義する．

ここまでで述べた ZFC の公理と，以下に述べる選択公理だけからなる枠組の中でも，（ほとんど）すべての古典的数学の議論は展開できるのであるが，集合論ではさらに次の 2 つの公理を仮定する．

分出公理と同じように，次の置換公理も，集合に関する性質 $\varphi(x, y, z, x_0, \ldots, x_{n-1})$ 各々に対応する公理を集めた公理群である：

（置換公理）$_\varphi$　すべての集合 A と，c_0，...，c_{n-1} に対し，任意の $a \in A$ をとったときに，$\varphi(a, b, A, c_0, \ldots, c_{n-1})$ となるような b が一意に決まるなら，集合 B で，$b \in B$ となることと，ある $a \in A$ に対し $\varphi(a, b, A, c_0, \ldots, c_{n-1})$ となることとが同値になるようなものが存在する．

置換公理でその存在の保証された集合 B は，φ, A, c_0,. . . , c_{n-1} を固定するごとに一意に決まる．そこで，分出公理のときと同様に，このような B を，

$$\{b : \text{ある } a \in A \text{ に対し，} \quad \varphi(a, b, A, c_0, \ldots, c_{n-1})\}$$

と表わすことにする．

置換公理は，分出公理の拡張になっており，実際，置換公理と他の集合論の公理から，分出公理の一つ一つの主張を導き出すことができる．これまでの他の公理と違い，置換公理は通常の数学の議論では用いられることが稀な公理である．古典的な数学ではこの公理が必要となることはない，と断言してもよいくらいである．しかし 20 世紀以降の数学では，たとえば，ボレル集合に関するいくつかの重要な結果などで，この公理が本質的に用いられていることが知られている[8)]．

置換公理の応用の 1 つとして，集合 x の推移的閉包の構成法を見てみることにする．

集合 x は，すべての $y \in x$ と $z \in y$ に対し，$z \in x$ が成り立つとき，推移的であるという．集合 x' が集合 x の推移的閉包であるとは，x' は推移的

8)　[Friedman 1971] を参照．ただし，以下でも見ることになるように，集合論（的数学）での議論では，この置換公理も縦横に用いられることになる．

で， $x \subseteq x'$ となり，すべての推移的な $x'' \supseteq x$ に対し $x' \subseteq x''$ が成り立つことである．

x を含む推移的な集合が存在すれば，x の推移的閉包は

$$\bigcap \{x' : x \subseteq x' \text{ で } x' \text{ は推移的 }\}$$

として得られる．とくに x の推移的閉包は存在すれば一意である．

補題 1.1　すべての集合 x に対し，その推移的閉包が存在する．

証明　$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$t(n, x) = \{y : \langle x_k : k \le n+1\rangle \text{ で } k \le n \text{ なら } x_k \ni x_{k+1} \text{ となり，} \\ x_0 = x,\, x_{n+1} = y \text{ となるものが存在する }\} \tag{1.5}$$

とする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $t(n, x)$ が集合となることは， $n \in \mathbb{N}$ に対する帰納法で示せるから[9)]，$n \mapsto t(n, x)$ を表わす，置換公理の定義でのような φ がとれる．したがって，置換公理により，$z = \{t(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ となる集合 z が存在する．$x' = \bigcup z'$ とすれば，x' が x の推移的閉包となることは容易に示せる．（証明終わり）

x の推移的閉包を $tcl(x)$ で表わすことにする．

次の基礎の公理と呼ばれるものも，通常の数学の議論ではほとんど用いられることがないものである．

（基礎の公理）　**空集合でない任意の集合 x に対し，$y \in x$ で，どんな $z \in x$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する．**

上で y のようなものを x の $\in$ に関する極小元とよぶことにする．

基礎の公理から，すべての集合 z に対し $z \in z$ とはならないことがわかる．もし $z \in z$ となる集合 z が存在したとすると， $x = \{z\}$ は基礎の公理の反例になってしまうからである．また，集合の列 $z_0, z_1, z_2, \ldots$ で，$z_n \ni z_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つなら，$x = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ とすると，x は

9)　帰納法については，2.2 節を参照．

基礎の公理の反例になってしまう．したがって，基礎の公理のもとでは，このような集合列も存在しない．

基礎の公理は技術的な理由で付け加えられた公理と言えるが，この公理を集合論の公理系に加えることの妥当性は，

(1.6)　$tcl(x)$ の空でない任意の部分集合が $\in$ に関する極小元を持つような集合 x の全体が，基礎の公理を含む集合論の公理系の「モデル」になること[10)] — 特にこのことから，ZFC から基礎の公理を除いたものが矛盾しないなら，(基礎の公理も含む）ZFC も矛盾しないことが示せる[11)]；

(1.7)　上で定義した $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ... など集合論の枠組の中で通常の数学を展開するのに必要となる集合は，すべて (1.6) のような性質を持つものになっていること；

(1.8)　基礎の公理ですべての集合に対して成り立つことの主張されている性質を満たさない集合の存在を保証する公理を集合論の他の公理に付け加えても (1.6) の性質を持つ集合の間の「内的」な関係として表わせる数学的性質に関しては何ら新しい結論が得られないこと[12)]

により保証されている，と考えることができる．

現代の数学的議論では次の選択公理 (Axiom of Choice) が頻繁に用いられる：

（選択公理）　空集合を要素として含まないような任意の集合 x に対し，x から $\bigcup x$ への写像 f で $f(z) \in z$ がすべての $z \in x$ に対し成り立つようなものが存在する．

このような f は，集合族 x の一つ一つの要素 z から z の「代表元」$f(z)$ を選び出す関数となっている．選択公理は AC と略記されることが多い．

10)　「モデル」という用語については，p.80 を参照されたい．
11)　定理 3.10 と定理 3.11 を参照．
12)　後の用語では，(1.6) の性質を持つ集合の全体は ZFC を満たす推移的なクラスとなり，このクラスに属す集合をパラメタとして含む Δ_1-論理式によって表わすことのできる性質は，このクラス上で絶対的となる．

選択公理は，ツェルメロがこの公理を定式化した当初から色々と物議をかもした公理である．バナッハ=タルスキーの逆理など，我々の物理的直観と相容れない結果を導くこともあるため，問題視されることもある．それにもかかわらずこの公理が通常仮定されるのは，

(1.9) 後述のゲーデルの構成的集合に関する結果から，ZF と ZFC とは無矛盾性に関して等価であることが示せること[13)]；

(1.10) Shoenfield の絶対性定理により，集合論での命題として表したときにそれほど複雑な形にならない数学的命題については[14)]，ZFC での証明が得られれば，それから選択公理を用いない証明を作りなおすことができること；

(1.11) 選択公理のオルタナティヴと考えられる決定性公理の成り立つ世界は，選択公理の成り立つ集合論の「宇宙」の内部モデルとしてとらえることができること — ウディン (H. Woodin) による（本書第 II 部を参照）；

そして何よりもまず，

(1.12) 選択公理の仮定のもとで展開される数学が非常に豊かなものであること，

などがその理由として挙げられるだろう[15)]．選択公理なしでは証明できない命題の例としては，線型空間の基底の存在定理や極大イデアルの存在定理，ハーン=バナッハの定理，非可測集合の存在定理などがあげられる．

13) 定理 4.9 を参照．

14) 正確には，$\mathcal{H}(\aleph_1)$ の元をパラメタとして含む Σ_1-論理式を $\mathcal{H}(\aleph_1)$ で相対化したもので表わせるような命題．ただし，$\mathcal{H}(\aleph_1)$ は，集合 x で x の要素，x の要素の要素，x の要素の要素の要素などのすべてが可算な集合の全体からなる集合である．古典的数学で扱われる命題のほとんどはこのような形に表わせる．

15) p.57 の脚注 32 も参照されたい．

1.2　集合論の 1 階の論理での公理化

以上で集合論の公理系 ZFC の公理をすべて見たわけであるが，ここで，保留していた，分出公理と置換公理における「集合に関する性質」という曖昧表現の問題の解決について述べておきたいと思う．分出公理や置換公理の個々の適用の際には，具体的な集合の性質が与えられるので，問題がなさそうにも思えるが，これでは，何を「集合に関する性質」と考えてよいのか，という指針が全く与えられておらず，ZFC の公理系の外延が定かにならない．

ツェルメロとフレンケルによる公理系の定式化は，上で述べたような問題の残ったものであった．現在知られているような厳密な意味での公理系としの ZFC の再構成がなされたのは，スコーレム (Thoralf Skolem, 1887–1963) による [Skolem 1923] においてで，そこでは，その当時新興の形式論理学での 1 階の論理と呼ばれる論理体系が用いられた．

1 階の論理については，本シリーズ第 2 巻でも詳しく述べられているので，ここでは，必要となる基本的な事項のみを簡単に述べるにとどめる．

数学の記述に関連する論理体系は，そこでどれだけの集合論的概念を a priori なものととらえるかに従って，いくつもの種類のものが考えられる．1 階の論理は，そのうち論理体系としては集合論的な概念をいちばん何も内包しないものとなっている．このことは，もちろん集合論の記述の基礎として用いる論理としての理にかなっていると言える．

1 階の論理は他の論理と同じように，その論理式（命題や述語を表わす記号列）とそれらの間の演繹関係の定義によって与えられる．集合論における論理式の全体は，次のように帰納的に（つまり記号列の複雑さに関する帰納法により）導入することができる：

まず無限個の変数（記号）を用意しておく，これを使って，

(1.13)　x, y が変数なら，表現 $x = y$, $x \in y$ は集合論の論理式である（以下では簡単のために「集合論の」は略す）；

(1.14)　φ, ψ が論理式なら，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は

論理式である；

(1.15) φ が論理式で x が変数なら $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は論理式である[16)]；

(1.16) 集合論の論理式は (1.13), (1.14), (1.15) の繰返し適用により得られるもののみである

とする．より一般的には，(1.13) で，$\in$ に加えて，あるいは $\in$ の代わりに，それ以外の述語記号や関数記号などを導入することで，集合論以外の他の理論に対する 1 階の論理の体系も導入できる．ここでは，上のようにして与えられた集合論のための 1 階の論理の体系を $\mathcal{L}_\in$ と表し，そこで導入された論理式を $\mathcal{L}_\in$-論理式とよぶことにする．

$\mathcal{L}_\in$-論理式 φ にあらわれる変数のうち φ の部分論理式[17)]で $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ という形をしたものの中に，ここでの x として現われていないようなものを φ の自由変数という．φ の自由変数が $x_0,\ldots,x_{n-1}$ にすべて含まれるとき，φ を $\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ とも表わす[18)]．$\mathcal{L}_\in$-論理式 φ は，自由変数を含まないとき，$\mathcal{L}_\in$-文，$\mathcal{L}_\in$-命題，あるいは，$\mathcal{L}_\in$-閉論理式であるという．$\mathcal{L}_\in$-文の集まりを（$\mathcal{L}_\in$ での）公理系，あるいは理論という．

上の論理式の定義 (1.13)〜(1.16) での $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\exists x\,(\cdots)$, $\forall x\,(\cdots)$ は，それぞれ「かつ」,「または」,「ならば」,「同値」,「でない」,「x が存在して $\cdots$」,「すべての x に対し $\cdots$」と読み下され，そのような意味に解釈されるべきものである[19)]．このような解釈により，集合論の公理を上で導入したような論理式に翻訳する．たとえば，外延性公理と空集合公理は，それぞれ，$\forall x\forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$, $\exists x\forall y\,(\neg y \in x)$ という論理式で表わすことができる．分出公理は，$\mathcal{L}_\in$ 論理式 $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ の 1 つ 1 つ

16) "$\exists$" と "$\forall$" はそれぞれ，存在記号，全称記号と呼ばれる．また，存在記号や全称記号を変数と組にして並べた "$\exists x$" と "$\forall x$" の形のものは，それぞれ存在量化子，全称量化子とよばれる．

17) $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ の (1.13)〜(1.15) の繰り返し適用による構成の過程であらわれる論理式を φ の部分論理式という．厳密には，このような意味の φ 部分論理式の全体を，φ の構成に関する帰納法により導入することで，部分論理式の概念を定式化できる．

18) この記法では，断らない限り，$x_0,\ldots,x_{n-1}$ など異なる記号で表された変数記号は互いに異なるものとする．

19) つまり以下で述べる推論規則など，すべてこの解釈が妥当なものになるように定義する．

に対し，論理式

$$(1.17)\quad \forall x\forall x_1 \cdots \forall x_n\exists y\forall z\,(z\in y\leftrightarrow(z\in x\wedge\varphi(z,x_1,\ldots x_n)))$$

を公理として加えることで導入できる[20]．置換公理についても，同様である：置換公理は，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ の 1 つ 1 つに対し，論理式

$$\begin{aligned}(1.18)\quad &\forall u\forall x_1\cdots\forall x_n((\forall x\in u)\exists!y(\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n))\\ &\qquad\to\ \exists v\forall y(y\in v\leftrightarrow(\exists x\in u)(\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n))))\end{aligned}$$

を公理として加えることで導入できる[21]．，

ここでは，1.1 で「集合に関する性質 φ」と述べたものは「$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ」で置き換えられているわけだが，後者による分出公理や置換公理の導入は，$\mathcal{L}_\in$ 論理式が (1.13)〜(1.16) により導入されていることに注意すると，外延の確定したものとなっていることがわかる．とくに $\mathcal{L}_\in$ の勝手な論理式が与えられたとき，この論理式が ZFC （の論理式の全体）に属すかどうかを判定することができる．

1 階の論理での論理式による推論（あるいは証明）の概念も，次のようにして規定することができる：ここでは列挙はしないことにするが，たとえば

> 「φ と $\varphi\to\psi$ がすでに結論されていれば，それから ψ を結論することができる」

を表わす

$$(1.19)\quad \varphi,\varphi\to\psi\vdash\psi$$

など，推論のパターンを有限個あつめた「推論規則の体系」 $\mathcal{R}$ を具体的に与えることができる．ここで，論理式 φ の論理式の集合 T からの証明とは

20) ただし，これらの論理式では，可読性のためにいくつかの括弧が省略されている．

21) (1.18) では，次の略記法が用いられている：論理式 η に対し，$(\exists x\in u)\eta$ は,「u の元 x が存在して η を満たす」を意味すべきもので，こう書いて，論理式 $\exists x(x\in u\wedge\eta)$ を表わすことにする．また，$\exists!x\eta(x,\cdots)$ は,「$\eta(x,\cdots)$ を満たすような x は一意に存在する」を意味すべきもので，論理式 $\exists x\eta(x,\cdots)\ \wedge\ \forall x_0\forall x_1(\eta(x_0,\cdots)\wedge\eta(x_1,\cdots)\to x_0=x_1)$ のこととする．

(1.20) 論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ で，φ_n は φ と等しく，各 φ_i, $i \leq n$ は，T に属すか，または $j_0, \ldots, j_{k-1} < i$ で，$\varphi_{j_0}, \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{k-1}} \vdash \varphi_i$ が $\mathcal{R}$ に含まれる推論規則の 1 つのパターンとマッチするものとなっているようなものがとれるようなもの

のこととする．

φ の T からの証明が存在するとき，φ は T の定理である，といい，これを $T \vdash \varphi$ と書く．T が空の公理系（つまり公理を 1 つも含まない公理系）のときには $T \vdash \varphi$ を $\vdash \varphi$ と書く．T が有限個の論理式 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ からなるときには，$T \vdash \varphi$ を $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi$ とも書くことにする．$T \vdash \varphi$ のときには，φ の T からの証明は有限的だから，この証明に含まれる有限個の論理式を $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ とすると，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi$ となる．

推論規則体系が妥当に与えられているときには，$\vdash \varphi$ は "φ が（論理的に）恒真であることの証明がある" ということの表明となり，$ZFC \vdash \varphi$ なら，つまり，φ が ZFC の定理なら，φ の ZFC からの上の意味での形式的な証明は φ の数学的な証明と解釈することができ，φ の表現している数学的事実は数学的定理であると考えてよい[22)]．

なお，上の論理式の定義では，"$\emptyset$", "$\subseteq$", "$\mathcal{P}(\cdot)$" などの記号は許されていないが，これらは，コンピュータ言語でのマクロのようなものとして体系に導入されているものと考える．とくに，これらの記号を使った論理式は，必要なら（述語記号として "$\in$" と "$=$" のみが用いられているような）$\mathcal{L}_\in$-論理式に書きなおせる[23)]．

数学的なアイデアの豊かさを思いおこすと，このような形式的証明の体系はいかにも貧弱な印象を与えるかもしれない．しかし，驚くべきことに，ゲーデルの完全性定理 [Gödel 1930] が保証しているように，(1 階の論理体系として知られている標準的な推論規則集 $\mathcal{R}$ に関して），すべての数学的命題につ

22) 論理式 φ etc. が自由変数を含む場合には，$T \vdash \varphi$ の解釈は推論規則の体系 $\mathcal{R}$ により異なることがあるが，ここでは，$T \vdash \varphi$ をそこに現われる自由変数を含む論理式 $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ の各々をその全称閉包 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ で置き換えて得られる $T' \vdash \varphi'$ と同値になるよう，$\mathcal{R}$ が導入されているものと仮定する．

23) コンピュータ用語とのアナロジーを続ければ，「マクロ展開できる」ということである．

いて，その数学的証明が存在すれば,（その証明が正しいものであるかぎり）対応する $\mathcal{L}_{\in}$-論理式 φ の（形式的体系 $\mathcal{R}$ での） ZFC からの証明が存在する！ ZFC をこのような形式的体系として認識し研究する分野はとくに公理的集合論 (axiomatic set theory) とよばれる．これに対し，1.1 で述べたような記述により形式的体系を意識せずに議論を行うことを素朴集合論 (naïve set theory) とよぶことがある[24)]．集合論の古典的な結果の多くは，素朴集合論的立場からでも十分に理解可能である．例えば次の第 2 章で述べることがらのほとんどは，この立場で理解可能である．一方，第 4 章で述べることになる構成的集合の理論や強制法の理論の正確な記述や理解には， 1 階の論理による集合論の公理化が必要不可欠である．

公理的集合論による数学の形式化に対する一般的な注意を，もう一言だけ述べておきたい．

「全数学は公理的集合論の形式的体系の中に埋め込める」という主張は，一部の数学者にとって,「人間の祖先は猿だった」という主張に対してかつてのヨーロッパの多くの人々が感じたと思われるものと同種の不快感を呼び起こさせるもののようである．「数学」という言葉を聞いただけで不快感を募らせる人々も多数いる（らしい）という現実を思い出せば，このこと自体，何ら不思議でないのかもしれないが，単純な誤解がこの不快感の原因になっている場合も多いように思える．つまり,「全数学は公理的集合論の形式的体系の中に埋め込める」という主張が,「全数学は公理的集合論の形式的体系の中での記号操作として行われなくてはいけない」という主張ととり違えられてしまっていることが少なくないのではないかと思うのである．しかし,「全数学は公理的集合論の形式的体系の中に埋め込める」という事実の指摘は,「出来上がった数学を（必要なら）そのような体系の中に形式的に記述でき，そのことにより，数学理論の整合性（の度合）などを客観的に議論できるようになる」，ということを言っているにすぎず，数学者がこの体系での記述のように考えなくてはいけないということを意味しているものでは全くないのである．

24)　「ナイーヴ」という日本語の単語はポジティヴな意味を持つことも多いが，欧米語の naïve は主にネガティヴな意味を持つ形容詞である．

逆に，形式的体系の厳密性に魅力を感じる読者の中には，以下の議論が厳密な形式的記述によってなされていないことに不満を感じる者もあるかもしれない．集合論では，形式的体系の記述能力の限界ぎりぎりのアクロバットを行なうことも多いので，口語的な表現で述べられた議論が実際に体系の中で展開できることを入念に確かめることが是非とも必要となる場合も多い[25)]．しかし，数学は機械のためにあるのではなく，我々の「考える脳」のためのものなのであるから，直観的な把握と形式的記述の間を自由に行き来してファンタジーの飛翔がうながされるような理解の仕方を工夫することは非常に重要である．この点に関して，集合論研究における研究者の思考の生理学は，他の数学の分野におけるそれと全く同様である．

1.3　クラスとベルナイス=ゲーデル集合論

分出公理や置換公理は，ある条件を満たす $\varphi(x,\ldots)$ について $\{x : \varphi(x,\ldots)\}$ という形で導入できる集合の存在を保証しているが[26)]，この形の集合がすべての $\varphi(x,\ldots)$ に対して存在するわけではない．たとえば $\varphi(x)$ として $x=x$ を考えると，$\{x : x=x\}$ はすべての集合からなる集合とならなくてはならない．しかし，このようなものが存在し得ないことは，ラッセルのパラドックスとして知られている次のような議論により示せる：もし $V=\{x : x=x\}$ という集合が存在するとすれば，分出公理により，$X=\{x\in V : x\notin x\}$ も集合となる．もし，$X\in X$ とすれば，X の定義から $X\notin X$ となり矛盾である．そうでなければ，$X\notin X$ であるが，X の定義から，$X\in X$ となってしまい，やはり矛盾である．

また，たとえば，$\mathcal{G}=\{\langle G,\circ\rangle : \langle G,\circ\rangle \text{ は群である }\}$ となるような集合 $\mathcal{G}$

25)　集合論の形式的体系での記述の検証を細かく行うスタイルをとっている教科書には，[Takeuti and Zaring 1971] がある．

26)　たとえば，分出公理で存在の保証されている集合は $\{z\in x : \varphi(z,x_0,\ldots,x_{n-1})\}$ という形で表されるが，これは，$\{z : z\in x \wedge \varphi(z,x_0,\ldots,x_{n-1})\}$ と書きなおすことができる．

も存在しないことが示せる[27]．それにもかかわらず，V や $\mathcal{G}$ をあたかも集合であるかのように用いることがある．この場合，たとえば,「ある $x \in V$ に対し」あるいは「ある $G \in \mathcal{G}$ に対し」などと言ったときには，これらは,「ある（集合）x に対し」あるいは「ある群 G に対し」という言い回しの単なる言換えと看做すことができるからである．

このように「方便」として導入された「集合もどき」のことをクラスとよぶ．$X = \{x : \varphi(x, \ldots)\}$ のとき，X を $\varphi(x, \ldots)$ のクラスとよぶことにする．クラスのうちには，実は集合となるものもあるが，V や $\mathcal{G}$ のように集合でないものを，真のクラスという．

真のクラスは集合ではないので，集合やクラスの元になることはない．また,「すべてのクラス X に対し ...」や「あるクラス X に対し ...」などは，$\mathcal{L}_\in$ では表現すらできない．

これに対し，集合に対して導入された演算のうちには，クラスに対しても有効なものもある．たとえば C を空でないクラスとして，$C = \{x : \varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ となっているとするとき，$\bigcap C$ は集合となる：x_0 を $\varphi(x_0, a_0, \ldots, a_{n-1})$ となるようなものの一つとするとき，$\bigcap C$ は

$$\bigcap C = \{z \in x_0 : \forall x(\varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \rightarrow z \in x)\} \tag{1.21}$$

と表わせるが，分出公理により，これは集合である．

クラスに対する（有限的な）ブール演算の結果もクラスである．たとえば，X が $\varphi(x, \ldots)$ のクラスで Y が $\psi(x, \ldots)$ のクラスであるとき，$X \cap Y$ は $\varphi(x, \ldots) \wedge \psi(x, \ldots)$ のクラスとなる．

分出公理は,「任意の集合 x とクラス X の共通部分 $x \cap X$ は集合である」と表現することもできる．

基礎の公理の命題の「任意の集合 x」を「任意のクラス X」で置き換えた次の形のものも基礎の公理の下で成り立つ：

27) このことは，2.4 節で述べることになる基数の概念を用いると，1. 任意の濃度（p.56 を参照）の群が存在すること，および，2. 基数の全体からなるクラス $Card$ は真のクラスである（補題 2.36），という事実から示すことができる．

(1.22) 任意の空でないクラス X に対し $y \in X$ で，どんな $z \in X$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する[28)]．

もちろん「任意の空でないクラス X」というのはここでも方便にすぎず，一つ一つの論理式 φ に対する φ のクラス X についての (1.22) に対する $\mathcal{L}_\in$ の文を集めたものが (1.22) の実体である．(1.22) は次のように証明できる：X を空でないクラスとするとき，$y' \in X$ がとれるが，$x = tcl(\{y'\}) \cap X$ とすれば，$x \neq \emptyset$ だから基礎の公理により x の $\in$ に関する極小元 y がとれるが，y は X の $\in$ に関する極小元でもある．

以下では $\mathcal{L}_\in$ での理論 T で ZFC 以外のものに関して議論することもあるが，このような場合にも，同様にクラスを考えることにする．つまり T で X が $\varphi(x, \ldots)$ のクラスのとき，“$a \in X$” は $\varphi(a, \ldots)$ の言換えのこととするわけである．

ZFC ではクラスが略記法に過ぎないのに対し，クラスをオブジェクトとして認める集合論の定式化もいくつか存在する．ベルナイス=ゲーデル集合論 (BG) とよばれる体系もそのようなものである．ゲーデルによる [Gödel 1940] では，第 4 章で述べることになる構成的集合の理論や一般連続体仮説の集合論からの無矛盾性証明は，この体系の上で証明されている．そこで，ここでは，BG の体系とその ZFC との関係について見ておくことにする．

BG はベルナイスによる [Bernays 1937] で導入された公理系で，上記のように [Gödel 1940] で基礎となる公理系として採用されている．[Gödel 1940] では，BG の定式化は，クラスを表わす変数の集まりと，これとは共通部分を持たない，集合を表わす変数の集まりを持つ論理体系の上で行われている．しかし，変数はクラスの上を走るものと思い，クラスが集合であることを表わす（たとえば $\mathtt{set}(\cdot)$ という）1 変数述語記号を導入することで，通常の 1 階の論理の枠組の中で同等の公理系を定式化することができる．

ここでは，$\mathcal{L}_{BG}$ で，$\in$ と $\mathtt{set}$ を述語記号として持つ 1 階の論理での言語を表わすことにして，$\mathcal{L}_{BG}$-文からなる公理系 BG を以下の (1.26)～(1.34)

28) 基礎の公理のときと同様に，このような y は X で $\in$ に関し極小である，ということにする．

により導入する．このために，まず次の定義をしておく，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ に対し $\mathcal{L}_{BG}$ の論理式 φ^{set} を帰納的に次のように定義する：

(1.23) φ が $x = y$ または $x \in y$ なら，φ^{set} は φ 自身である；

(1.24) φ が $(\psi \land \eta)$ または，$(\psi \lor \eta)$ または，$(\psi \to \eta)$ または，$(\psi \leftrightarrow \eta)$ または，$\neg\psi$ の形をしているときには，φ^{set} はそれぞれの場合に応じて，$(\psi^{\mathsf{set}} \land \eta^{\mathsf{set}})$ または，$(\psi^{\mathsf{set}} \lor \eta^{\mathsf{set}})$ または，$(\psi^{\mathsf{set}} \to \eta^{\mathsf{set}})$ または，$(\psi^{\mathsf{set}} \leftrightarrow \eta^{\mathsf{set}})$ または，$\neg\psi^{\mathsf{set}}$ とする；

(1.25) φ が $\exists x\psi$ または，$\forall x\psi$ の形をしているときには，φ^{set} はそれぞれの場合に応じて $\exists x(\mathtt{set}(x) \land \psi^{\mathsf{set}})$ または，$\forall x(\mathtt{set}(x) \to \psi^{\mathsf{set}})$ とする．

BG の公理は以下の (1.26)～(1.34) のこととする．ただし $*$ の印のついた場所については，$\mathcal{L}_\in$ の論理式として表された，ZFC の対応する公理 φ に対し，φ^{set} と表される $\mathcal{L}_{BG}$ の論理式を公理として採用するものとする．また † の印のついた場所については，$\mathcal{L}_\in$ の論理式として表された，ZFC の対応する公理 φ をそのまま公理として採用するものとする．

(1.26) (外延性公理)^{BG} †

(1.27) (集合の公理)^{BG} $\forall x\forall y(x \in y \to \mathtt{set}(x))$

(1.28) (対の公理)^{BG} $*$

各 $\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し，次の公理を採用する[29)]：

(1.29) (分出公理)$^{BG}_{\varphi}$

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \forall x \left(\mathtt{set}(x) \to (x \in y \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{set}}(x, x_1, \ldots, x_n))\right)$$

(1.30) (無限公理)^{BG} $*$

(1.31) (和集合の公理)^{BG} $*$

(1.32) (べき集合の公理)^{BG} $*$

29) 実は BG は有限個の公理による公理化が可能である．

“F はクラス関数” を次の論理式とする：

$$\forall x(x \in F \to \exists u \exists v\,(x = \langle u, v\rangle)) \wedge$$
$$\forall u \forall v \forall w\,(\langle u, v\rangle \in F \wedge \langle u, w\rangle \in F \to v = w)$$

また，$z = F''x$ を次の論理式とする：

$$\forall v\,(v \in z \leftrightarrow \exists u\,(u \in x \wedge \langle u, v\rangle \in F))$$

ただし，$\langle u, v\rangle$ は ZFC でと同じように導入されているものとする．

(1.33)　(置換公理)^{BG}
$\forall x \forall F\,(\mathtt{set}(x) \wedge F$ はクラス関数 $\to \exists y\,(\mathtt{set}(y) \wedge y = F''x))$

(1.34)　(基礎の公理)^{BG}　†

BG のセッティングでは ZFC の選択公理より見かけ上強い，すべての集合に対する選択関数の存在を主張する次の公理を記述することができる：

(1.35)　(選択公理)^{BG}
$\exists F\,($“F はクラス関数” $\wedge\ \forall x(\mathtt{set}(x) \wedge x \neq \emptyset \to F(x) \in x))$

BG に上の選択公理を加えたものを BGC とよぶことにする．これに対し，ZF の選択公理をあらわす論理式を AC として，BG に $(AC)^{\mathsf{set}}$ を加えたものを BGC' とよぶことにする．

ZFC と異なり，BG は有限個の公理で公理化可能なことが知られている（[Gödel 1940] を参照）．

次の定理により，BG と ZF または BGC と ZFC は（集合に対する命題に関しては）全く同等な公理系になっていることがわかる．とくに，BG と ZF または BGC と ZFC は無矛盾性に関して等価である（つまり片方の無矛盾性からもう片方の無矛盾性が言え，逆も成り立つ[30)]）．

30)　2 つの理論 T, T' の間にこのような関係があるとき，T と T' は同じ無矛盾性の強さを持つ，あるいは，無矛盾等価であるという．

定理 1.2　φ を $\mathcal{L}_\in$ の文とする．このとき，次の同値が成り立つ：

(1)　$ZF \vdash \varphi \Leftrightarrow BG \vdash \varphi^{\mathsf{set}}$

(2)　$ZFC \vdash \varphi \Leftrightarrow BGC \vdash \varphi^{\mathsf{set}}$

証明　証明のスケッチのみを示す．

(1): $\Rightarrow$): ZF の公理 φ のすべてに対し，$BG \vdash \varphi^{\mathsf{set}}$ が容易に示せるからよい．$\Leftarrow$): ZF の（十分に大きな有限部分の）モデルはモデルで定義可能な部分集合のすべてをクラスとして付加することで BG の（対応する十分に大きな有限部分の）モデルにできることを使えばよい．

(2): $\Rightarrow$): (1) の “$\Rightarrow$” と，$BGC \vdash (AC)^{\mathsf{set}}$ によりよい．$\Leftarrow$): (1) の “$\Leftarrow$” と同様にして，ZFC の（十分に大きな有限部分の）モデルが与えられたとき，BGC' の（対応する十分に大きな有限部分の）モデル M が（ZFC の中で）構成できるが，このモデルから出発して，新しい集合を付け加えないような class forcing により[31]，(1.35) でのような選択関数を付加することで，M を BGC の（対応する十分に大きな有限部分の）モデルに拡張することができる．　(証明終わり)

31)　forcing（強制法）については 4.2 節を参照．class forcing は強制概念がクラスであるような forcing のことである．

第2章

公理的集合論の展開

前章でも述べたように，公理的集合論の枠組の中で，従来の数学が（ほとんど）すべて展開できる[1]．従来の数学の多くは，それを展開するために ZFC のフルパワーは必要ではない．本章では，ZF(C) のフルパワーを必要とする数学理論の例として，順序数や基数の基礎理論の展開を見ておくことにする．ただし，以下の 2.1 節から 2.3 節までは，選択公理も基礎の公理も用いられていない．2.4 節以降では部分的に選択公理が用いられるが，そのような場合には，選択公理が用いられていることを注意することにする．ここでのこのような配慮をするのは，後で集合論の公理の間の独立性を論じるときに，それが必要となるからである．

2.7 節では連続体仮説と，そのいくつかの帰結，また解析学や線型代数学の言葉による連続体仮説のいくつかの特徴付けについて考察する．

---

1) 逆に，ある数学的理論が集合論の中で展開できないときには，その理論の基礎付けに関する別途の考察が必要となるであろう．

集合論の中に（そのままでは）展開できない数学理論としては，たとえばカテゴリー論や “new foundation” として知られている ZFC と両立しない集合論の体系などがあげられる．しかし，カテゴリー論は，BGC での理論，あるいは，ZFC 集合論の超数学での理論と解釈することが可能であるし，巨大基数 κ の存在を仮定して，V_κ （p.51 を参照）の部分集合に関する理論としての定式化も可能である．

New foundation に関しても，その研究は，ZFC の中で new foundation の公理系のモデルを考察する，あるいは集合論の体系との無矛盾等価性を論じるというような議論になることもある（たとえば，[Solovay ∞]）．

このように見ると，既存の数学理論のうち，集合論の中で展開できないものは存在しない，と言いきってしまっても問題がないように思われる．

2.1　整列順序

X を集合とするとき，R が X 上の二項関係であるとは，$R \subseteq X^2$ となることである．x, $y \in X$ に対し，$x\ R\ y$ で $\langle x, y\rangle \in R$ を表わすことにする．$x\ R\ y$ は，“x と y が関係 R にある” と読み下すことができる．たとえば，

$$< = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : x \text{ は } y \text{ より小さい}\}$$

とすると[2)]，$<$ は $\mathbb{N}$ 上の二項関係となり，ここでの記法による，“$x < y$” は通常の数の大小関係と一致する．“x は y より小さい” が述語なのに対し，$<$ は集合となっていることに注意する．

R と S をそれぞれ X と Y の上の二項関係とするとき，$f : X \to Y$ が $\langle X, R\rangle$ から $\langle Y, S\rangle$ への同型写像であるとは，f は全単射で[3)]，すべての x_0, $x_1 \in X$ に対し，

$$x_0\ R\ x_1 \ \Leftrightarrow\ f(x_0)\ S\ f(x_1)$$

となることである．f が $\langle X, R\rangle$ から $\langle Y, S\rangle$ への同型写像であるとき，これを $f : \langle X, R\rangle \overset{\cong}{\to} \langle Y, S\rangle$ とも表し， このような f が存在するとき，$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ は同型であるという．$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ が同型のとき，同型写像を指定せずに，$\langle X, R\rangle \cong \langle Y, S\rangle$ と書くこともある．$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ が同型のときには，$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ は同じ構造を持つ互いの “コピー” になっていると考えられる．

X 上の二項関係 R が半順序であるとは，次の (2.1), (2.2) が成り立つことである：

(2.1)　すべての $x \in X$ に対し $x\ R\ x$ でない;

2)　$\mathbb{N}$ が 10 ページでのように定義されているとき，“x は y より小さい” は，“$x \in y$” によって定義することができる．

3)　$f : X \to Y$ として，すべての異なる x, $x' \in X$ に対し，$f(x)$, $f(x')$ も異なるとき，f は単射あるいは 1 対 1 写像であるといい，すべての $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる $x \in X$ がとれるとき，全射あるいは上射（上への写像）であるという．f が単射かつ全射のとき，f は全単射であるという．

(2.2)　すべての $x, y, z \in X$ に対し，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ なら $x \mathrel{R} z$.

R は X の 2 元（のうちのいくつか）の比較を与えるものと考えることができる．“$x \mathrel{R} y$” を “y は x より真に大きい” と読み下してみると，(2.1), (2.2) の条件は納得できるであろう．

X 上の半順序 R がさらに

(2.3)　すべての異なる $x, y \in X$ に対し，$x \mathrel{R} y$ または $y \mathrel{R} x$ のどちらかが成り立つ

を満たすとき，R は X 上の全順序であるという．(2.3) により，R が X 上の全順序のときには，X の任意の 2 元は R により比較が可能となる．したがって，X の元は R により “一列に” ならべられることになる．そのため全順序を線型順序とよぶこともある．以下で半順序を考えるときには，“y は x より真に大きい” という解釈を強調するため，文字 R のかわりに “$<$” という記号を使うことにする．$<$ が X 上の半順序であるとき，“$x \le y$” で “$x < y$ または $x = y$” という関係を表わす．これは X 上の二項関係としては

$$\le \; = \; < \cup \{\langle x, x\rangle \in X^2 : x \in X\}$$

を考えていることになる．$<$ が X 上の半順序（または全順序）のとき，X と $<$ の組 $\langle X, <\rangle$ を半順序集合（または全順序集合）とよぶ．

X を集合として $<$ を X 上の二項関係とする．$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合である[4)]とは，次が成り立つことである：

(2.4)　$\langle X, <\rangle$ は全順序集合である；

(2.5)　すべての空でない X の部分集合 A は $<$ に関する最小元を持つ（これを $\min A$ で表わす）．

次は容易に示せる：

4)　$<$ は X 上の整列順序である，あるいは，$<$ は X を整列する，などとも言うことにする．

補題 2.1　$\langle X,<\rangle$ が整列順序集合で，$C \subseteq X$ なら，

$$< \restriction C = < \cap (C \times C) = \{\langle x,y\rangle : x \in C, y \in C \text{ かつ } x < y\}$$

は C 上の整列順序となる．

簡単のために $< \restriction C$, $< \cap (C \times C)$ などと書くかわりに，単に $<$ と書くことが多く，たとえば，“$\langle C,<\rangle$ は整列順序である”，などと言うことにする．後で二項関係の一つとして，集合の要素関係 “$\in$” を考えることになる．このときも，たとえば，$\langle X,\in\rangle$ と書いたときには，ここでの $\in$ は $\in \restriction X = \in \cap X^2 = \{\langle x,y\rangle \in X^2 : x \in y\}$ のことである．

$\langle X,<\rangle$ が整列順序集合で $X \neq \emptyset$ なら，$\langle X,<\rangle$ は最小元を持つ： これを見るには，(2.5) で，A として X 自身をとってみればよい．

一方，X は最大元を持つ必要はない — 例えば，$\langle X,<\rangle = \langle \mathbb{N},<\rangle$ とすると，X が整列集合となることは容易に確かめられるが，X は最大元を持たない．

$x \in X$ が X の最大元でないなら，$y \in X$, $x < y$ で，どんな $z \in X$ に対しても $x < z < y$ とはならないようなものがとれる — このときには，$\{z \in X : x < z\}$ は空でないから，この集合の最小元がとれるが，これが求める性質を持つものとなっている．このような y を x の（X での）次の元と言う．x の X での次の元を x' と表わす．$x' = \min\{z \in X : x < z\}$ である．

X の元 z は X の最小元でなく，どの $x \in X$ によっても，x' と表わせないとき， X の極限点とよばれる．X のすべての元 x は，X の最小元であるか，極限点であるか,（ただ一つに決まる $z \in X$ の）次の元であるか，のどれかである．最後の場合 x は X の非極限点である，と言うことにする．x が X の極限点なら，すべての $z \in X$ に対し，$z < x$ なら $z' < x$ である：$z < x$ なら $z' \leq x$, だが x は次の元でないことから，ここで “$=$” は成り立たないからである．

例 2.2　自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ は自然な順序により整列順序集合となる．$n \in \mathbb{N}$ に対し，$n' = n \cup \{n\}$ である．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$n \neq 0$ な

ら，$m' = n$ となる $m \in \mathbb{N}$ がとれるから，$\mathbb{N}$ は極限点を含まない．一方 $X = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ として，X 上の二項関係 $<_X$ を，

$$<_X = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : (x, y \in \mathbb{N} \text{ かつ } x < y) \\ \text{または } (x \in \mathbb{N} \text{ かつ } y = \mathbb{N})\ \}$$

と定義すると，$<_X$ は X 上の整列順序となり，$\mathbb{N}$ は X での（$<_X$ に関する）極限点となっている．

例 2.3　実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を自然な順序で考えると，線形順序集合となるが，整列順序集合ではない．たとえば，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ は最小元を持たない．

$\langle X, <_X\rangle$ と $\langle Y, <_Y\rangle$ を全順序集合とするとき，$f : X \to Y$ が真に増加とは，任意の $x_0, x_1 \in X$ が $x_0 <_X x_1$ を満たすとき，$F(x_0) <_Y F(x_1)$ が成り立つこととする．

補題 2.4　$\langle X, <\rangle$ を整列順序として，$F : X \to X$ を真に増加な関数とする．このとき，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq F(x)$ が成り立つ．

証明　$F_0 : X \to X$ が補題の反例となっているとして矛盾を導く．つまり F_0 は真に増加だが，$F_0(x) < x$ となるような $x \in X$ が存在するとする．このとき，$x_0 = \min\{x \in X : F_0(x) < x\}$ がとれるが，$F_0(x_0) < x_0$ だから，x_0 の最小性より，$F_0(x_0) \leq F_0(F_0(x_0))$ となる．一方 F_0 の増加性から，$F_0(x_0) < x_0$ の両辺に F_0 を施すと $F_0(F_0(x_0)) < F_0(x_0)$ となる．したがって，(2.2) により，$F_0(x_0) < F_0(x_0)$ となるが，これは (2.1) に矛盾である．　(証明終わり)

系 2.5　$\langle X, <\rangle$ を整列順序とする．このとき，X 上の恒等写像 id_X は，$\langle X, <\rangle$ からそれ自身への唯一の同型写像[5)]となる．

5)　集合 X に対し，$id_X = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ で定義される X から X への関数を X 上の恒等写像という．すべての $x \in X$ に対し $id_X(x) = x$ である．

証明　id_X が $\langle X, <\rangle$ から $\langle X, <\rangle$ への同型写像であることは明らかである．$F : X \to X$ を任意の同型写像とするとき，F も F^{-1} も増加関数となるから，補題 2.4 により，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq F(x)$ かつ $x = F^{-1}(F(x)) \geq F(x)$, したがって $x = F(x)$ が成り立つ．よって $F = id_X$ である．　(証明終わり)

系 2.6　$\langle X, <\rangle$ と $\langle Y, <\rangle$ を整列順序集合とする．もし，$\langle X, <\rangle$ から $\langle Y, <\rangle$ への同型写像が存在すれば，この同型写像は一意に決まる．

証明　$F : X \to Y$ と $G : X \to Y$ を $\langle X, <\rangle$ から $\langle Y, <\rangle$ への同型写像とすれば，$F^{-1} \circ G$ は $\langle X, <\rangle$ から $\langle X, <\rangle$ への同型写像となるから，系 2.5 により，$F^{-1} \circ G = id_X$ である．したがって，この等式の両辺に F を適用すると $G = F$ がわかる．　(証明終わり)

$\langle X, <\rangle$ を半順序集合とする．X の部分集合 I が X の始片であるとは，

$$(\forall c \in I)(\forall x \in X)(x \leq c \ \to \ x \in I)$$

が成り立つこととする．X の始片 I は X と異るとき X の真の始片であるという．

$\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として，I が X の真の始片のとき，$x = \min(X \setminus I)$. として，x で定義される始片を $X_{<x} = \{y \in X : y < x\}$ と定義すると，$I = X_{<x}$ となる：$y \in X_{<x}$ なら，$y < x$ だから，x の定義から $y \in I$ がわかる．逆に，$c \in I$ なら，$c < x$ である：そうでなければ（$<$ が全順序であることから）$x \leq c$ となり，I は始片だから $x \in I$ となってしまい，x の定義に矛盾である．したがって，$c \in X_{<x}$ である．

系 2.7　$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合なら，$\langle X, <\rangle$ は，$\langle X, <\rangle$ のどの真の始片とも同型にならない．

定理 2.9 の証明のために，まず，次の補題を用意しておく．証明は 11 ページで述べた関数の定義 (1.2) から明らかである．

補題 2.8 $\mathcal{F}$ を関数を要素とする集合とする．$F = \bigcup \mathcal{F} \, (= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f)$ が関数となるのは，$\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しないときである[6)]．また，このときには，$dom(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ となる．

定理 2.9 $\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ を整列順序集合とするとき，次の 3 つのうち（ちょうど）1 つが成り立つ：

(1) $\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ は同型である．

(2) $\langle X, < \rangle$ は $\langle Y, < \rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．

(3) $\langle Y, < \rangle$ は $\langle X, < \rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．

証明 定理が成り立たないとすると，整列順序集合 $\langle X, < \rangle$, $\langle Y, < \rangle$ で，(1), (2), (3) のいずれも成り立たないようなものが存在する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{ f \, : \, & X \text{ のある始片 } X' \text{ と } Y \text{ のある始片 } Y' \text{ に対し} \\ & f : \langle X', < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle Y', < \rangle \, \}\end{aligned}$$

とする[7)]．このとき，

Claim 2.9.1 $f, g \in \mathcal{F}$ なら，$f \subseteq g$ か $g \subseteq f$ のいずれかが成り立つ．

$\vdash$ $f, g \in \mathcal{F}$ なら，$dom(f), dom(g)$ はともに X の始片だから，$dom(f) \subseteq dom(g)$ か $dom(g) \subseteq dom(f)$ のいずれかが成り立つ．仮に $dom(f) \subseteq dom(g)$ とすると，補題 2.1 と系 2.6 により，$f = g \restriction dom(f)$ となるから，$f \subseteq g$ である[8)]．同様に $dom(g) \subseteq dom(f)$ とすると，$g \subseteq f$ が成り立つ．

$\dashv$

Claim 2.9.1 と補題 2.8 により，$f^* = \bigcup \mathcal{F}$ は $dom(f^*) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ 上の関数となるが，

Claim 2.9.2 f^* は $\mathcal{F}$ の最大元となる．

---

6) $\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しない，とは，すべての $f, g \in \mathcal{F}$ に対し，$f \cap g$ が（$dom(f) \cap dom(g)$ 上の）関数となるとき（つまり，すべての $x \in dom(f) \cap dom(g)$ に対し，$f(x) = g(x)$ となるとき）である．

7) $\mathcal{F}$ が集合であることは $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ と分出公理により示せる．

8) $f \restriction S$ で関数 f の S への制限を表わす．$f : X \to Y$ のとき，$f \restriction S = f \cap (S \times Y)$ である．

$\vdash$ $dom(f^*) = \bigcup\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$, $f^{*\prime\prime} dom(f^*) = \bigcup\{f'' dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ だから，f^* は X の始片から Y の始片への写像となっている．$X^* = dom(f^*), Y^* = f^{*\prime\prime} dom(f^*)$ とおく．

f^* が順序を保存することを見るために $x, y \in X^*$, $x < y$ をとる．このとき $f, g \in \mathcal{F}$ で，$x \in dom(f), y \in dom(g)$ となるものがあるが，Claim 2.9.1 により，たとえば，$g \subseteq f$ としてよい．したがって $x, y \in dom(f)$ としてよいが，$f \in \mathcal{F}$ により，$x < y$ から $f^*(x) = f(x) < f(y) = f^*(y)$ となる．$f^*(x) < f^*(y)$ なら $x < y$ となることも同様に示せる．

したがって $f^* \in \mathcal{F}$ だが，f^* の定義から，すべての $f \in \mathcal{F}$ に対し，$f \subseteq f^*$ となるから，f^* は $\mathcal{F}$ の最大元である． $\dashv$

仮定により，$X^* \neq X$, $Y^* \neq Y$ だから，$x^* = \min(X \setminus X^*)$, $y^* = \min(Y \setminus Y^*)$ がとれるが，

$$f^{**} = f^* \cup \{\langle x^*, y^* \rangle\}$$

とすれば，明らかに $f^{**} \in \mathcal{F}$ となる．ところが，$f^* \subsetneqq f^{**}$ だから，これは f^* が $\mathcal{F}$ の最大元であることに矛盾である． (証明終わり)

2.2 数学的帰納法による証明と関数の再帰的定義

整列順序集合上では，命題を帰納的に証明したり，関数を再帰的に定義したりすることができる．

定理 2.10 (帰納法) $\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．すべての $x \in X$ に対し， 条件：

(2.6) すべての $y < x$ に対し命題 $E(y)$ が成り立つなら，x に対しても命題 $E(x)$ が成り立つ

が成り立つなら，すべての $x \in X$ に対し，命題 E が成り立つ．

証明　定理が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．この仮定により，整列順序集合 $\langle X, < \rangle$ と X の元 x に関する命題 $E(x)$ で，E は (2.6) を満たすが，$E(x)$ とならないような $x \in X$ が存在するようなものがとれる．したがって，

$$Y = \{x \in X : E(x) \text{ は成り立たない }\}$$

とすると Y は空でない．よって，X が整列順序集合であることから，Y の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性から，すべての $y \in X$, $y < x_0$ に対し，$E(y)$ が成り立つ．したがって (2.6) により，$E(x_0)$ も成り立つことが帰結できてしまうが，これは，$x_0 \in Y$ に矛盾である．　(証明終わり)

整列順序 $<$ 上の帰納法は，次のようなやり方で行われることも多い[9)]：

定理 2.11　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．次の (2.7), (2.8), (2.9) が成り立つとする：

(2.7)　X の最小元は E を満たす.

(2.8)　$x \in X$ が E を満たし，X の最大元でないなら，x' も E を満たす.

(2.9)　x が極限点で，$y < x$ となるすべての y が E を満たすなら，x も E を満たす.

このとき，すべての $x \in X$ は E を満たす.

証明　E が 定理 2.10 での (2.6) を満たすことを示せばよい．このため，$x \in X$ を任意にとり，$E(y)$ がすべての $y < x$ に対し成り立つとして，$E(x)$ を示す.

x が X の最小元のときには，(2.7) により $E(x)$ となるから，(2.6) は成り立つ．x が最小元でないときには，x は（ある X の元の）次の元であるか，極限点であるかのどちらかであるが，x が次の元のときには，(2.8) により，x が極限点であるときには，(2.9) により，$E(x)$ が成り立つ.

---

9)　ここでは，p.32 でのように，$x \in X$ が X の最大元でないとき，x' で x の X での次の元を表している.

したがって，(2.6) が成り立つことがわかるが，このことと定理 2.10 により，すべての $x \in X$ に対し $E(x)$ が成り立つことが帰結できる．

(証明終わり)

定理 2.12 (関数の再帰的定義)　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y をある集合とする．G を，

$$dom(G) = \{ f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片から } Y \text{ への関数} \}$$

から Y への関数とする[10]．このとき，$F : X \to Y$ で，すべての $x \in X$ に対し，

$$(2.10) \quad F(x) = G(F \restriction X_{<x})$$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する[11]．

証明　まず，(2.10) を満たすような F がたかだか一つしか存在しないことを示す．X 上の関数 F と F' が，ともに (2.10) を満たしていると仮定する．$F \neq F'$ だったとすると，$\{x \in X : F(x) \neq F'(x)\}$ は空でないから，この集合の最小元 x_0 がとれるが，$y < x_0$ なら x_0 の最小性から，$F(y) = F'(y)$ となる．したがって，$F \restriction X_{<x_0} = F' \restriction X_{<x_0}$ となるが，このことから，

$$F(x_0) = G(F \restriction X_{<x_0}) = G(F' \restriction X_{<x_0}) = F'(x_0)$$

となってしまい x_0 のとり方に矛盾する．したがって $F = F'$ である．

次に，(2.10) を満たすような F が実際に存在することを示す．

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{ f : f &\text{ は } X \text{ のある始片 } I \text{ 上の関数で} \\ &\text{すべての } x \in I \text{ に対し，} \ f(x) = G(f \restriction X_{<x}) \text{ が成り立つ} \} \end{aligned}$$

10)　直観的には，G は，F が X のある始片まで定義できたときに，これを一つ先の元にどう延長するかを指定する関数である．(2.10) は，F がこの延長を “くりかえす” ことで得られる関数となっていることを主張している．

11)　定理 2.12 は，G が関数でなく，定義可能な対応（つまり，脚注 19 の意味でのクラス関数）である場合にも成り立つが，このことの証明には，分出公理だけでは不十分で，置換公理が必要となる．

とする．$\emptyset \in \mathcal{F}$ だから[12]，$\mathcal{F} \neq \emptyset$ である．

以下で，この $\mathcal{F}$ に補題 2.8 を適用して，$F = \bigcup \mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す.

Claim 2.12.1 $f, g \in \mathcal{F}$ なら f と g は矛盾しない.

$\vdash$ $dom(f) \subseteq dom(g)$ と仮定してよい．f と g が矛盾するなら，$x \in dom(f) \cap dom(g)$ で $f(x) \neq g(x)$ となるものが存在する．x_0 をそのようなもののうち最小のものとすると，x_0 の最小性から $f \restriction X_{<x_0} = g \restriction X_{<x_0}$ となるから，$\mathcal{F}$ の定義から，$f(x_0) = G(f \restriction X_{<x_0}) = G(g \restriction X_{<x_0}) = g(x_0)$ となってしまい矛盾である． $\dashv$

Claim 2.12.2 $F = \bigcup \mathcal{F}$ は X 上の関数で，$F \in \mathcal{F}$ である．とくに F は (2.10) を満たす.

$\vdash$ $F = \bigcup \mathcal{F}$ とすると，Claim 2.12.1 と補題 2.8 により，F は X の始片 $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ 上の関数となる[13]．すべての $f \in \mathcal{F}$ は (2.10) を満たすから，F も (2.10) を満たす．したがって $F \in \mathcal{F}$ である． $\dashv$

もし $dom(F) = X$ でなかったとすると $X \setminus dom(F)$ の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性と $dom(F)$ が X の始片であることから，$dom(F) = X_{<x_0}$ がわかる．ここで，

$$f^{**} = F \cup \{\langle x_0, G(F) \rangle\}$$

とすると，$f^{**} \in \mathcal{F}$ となるが，$F \subsetneqq f^{**}$ だから，これは F のとり方に矛盾である． (証明終わり)

定理 2.11 と同じように，上の定理に対しても，X 上の F が 場合分けをともなった再帰によって定義されているような形のヴァージョンが考えられる：

12) 関数の定義から，$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ だが，$\emptyset$ は $\emptyset$ 上の唯一の関数で，x_0 を X の最小元とするとき，$X_{<x_0} = \emptyset$ であることに注意すると，$\emptyset \in \mathcal{F}$ がわかる.

13) ここに，$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ は $\bigcup \{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ のことである．この集合は，分出公理からその存在を保証される $\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に和集合の公理を適用して得られるものとなっている．脚注 11 は，G がクラスの場合には，対応する証明で，上の "$\subseteq \mathcal{P}(X)$" によるトリックが使えなくなるため，置換公理を使って $\bigcup \{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ の存在を保証する必要が出てくることを指摘している.

定理 2.13　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y を集合とする．$H : Y \to Y$ とし，K を $\{f : f$ は，ある X の真の始片から Y への関数 $\}$ から Y への写像として，$a \in Y$ とする．このとき，関数 $F : X \to Y$ で，

$$F(x) = \begin{cases} a & x \text{ が } X \text{ の最小元のとき} \\ H(F(z)) & x \text{ が } X \text{ の非極限点で } x = z' \text{ のとき} \\ K(F \restriction X_{<x}) & x \text{ が } X \text{ の極限点のとき} \end{cases} \tag{2.11}$$

となるものがただ一つ存在する．

集合 x が推移的とは，すべての $y \in x$ と $z \in y$ に対し $z \in x$ が成り立つことだった．

例 2.14　$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は推移的である．$\{\{\emptyset\}\}$ は推移的でない．$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ は推移的である．

補題 2.15　(1)　t が推移的なら $t \cup \{t\}$ も推移的である．

(2)　集合 $\mathcal{F}$ の元がすべて推移的なら，$\bigcup \mathcal{F}$ も推移的である．

証明　(1): $x \in y \in t \cup \{t\}$ とする．$y \in t$ なら，t は推移的だから，$x \in t$ である．また $y \in \{t\}$ なら $y = t$ となるから，このときも $x \in t$ となる．したがって，いずれの場合にも $x \in t \subseteq t \cup \{t\}$ である．

(2): $x \in y \in \bigcup \mathcal{F}$ なら，$u \in \mathcal{F}$ で $y \in u$ となるものがあるが，仮定から u は推移的だから，$x \in u$ となる．したがって，$x \in \bigcup \mathcal{F}$ である．

(証明終わり)

補題 2.16　T を推移的として，$\in$ は T 上の全順序となっているとする．このとき，

(0)　T が（$\in$ に関する）極小元 x を持てば，$x = \emptyset$ である．

(1)　すべての $x \in T$ は推移的となる．

(2)　$x, y \in T, x \in y$ で，y は（$\in$ の意味で）x の次の元になっているとする．このとき，$y = x \cup \{x\}$ である．

(3)　$U \subseteq T$ で，U は推移的で，最大元を持たないとする．$x \in T$ が U の（$\in$ の意味での）最小の上界になっているとき，$U = \bigcup U = x$ である．

証明　(0): $x \in T$ で $x \neq \emptyset$ とすれば，$y \in x$ がとれるが，T が推移的であることから，$y \in T$ となり，x は T の $\in$ に関する極小元でないことがわかる．

(1): $z \in y \in x$ なら，T が推移的により $y \in T, z \in T$ である．したがって，$\in$ が T 上の全順序であることから，$z \in x$ が結論できる．

(2): $x \in y$ と (1) により，$x \subseteq y$ である．したがって，$x \cup \{x\} \subseteq y$ だが，もし $x \cup \{x\} \neq y$ だったとすると，ある $z \in y \setminus (x \cup \{x\})$ がとれる．とくに $z \neq x$ である．T は推移的だから，$z \in T$ となるが，$z \notin x \cup \{x\}$ だから，$\in$ が T 上で全順序となっていることから，$x \in z$ となる．したがって，$x \in z \in y$ となるが，$\in$ は T 上全順序であることから $z \neq y$ である．これは y が x の次の元であることに矛盾する．

(3): x は U の上界だが U の最大元ではないから，$U \subseteq x$ となる．したがって，$U \neq x$ とすれば，$z \in x \setminus U$ がとれるが，すべての $u \in U$ に対し，$u \in z$ となる： もしそうでないなら，$\in$ が T 上全順序であることから，$u = z$ または，$z \in u$ となるが，U が推移的であることから，いずれの場合にも $z \in U$ となり z のとり方に矛盾である．したがって z は U の上界となるが，$z \in x$ だから，これは x が U の最小上界であることに矛盾である．

以上で $U = x$ が示せた．$U = \bigcup U$ であることは次のようにして見ることができる: $x \in U$ なら，U が最大元を持たないことと (2) から，$x \cup \{x\} \in U$ である．したがって，$x \in x \cup \{x\} \subseteq \bigcup U$ でる．逆に，$x \in \bigcup U$ なら，$x \in y \in U$ となる y が存在するが，U は推移的だから，このことから $x \in U$ となる．　(証明終わり)

定理 2.17 (モストフスキーの同型定理)
$\langle X, < \rangle$ を，整列順序集合とする．このとき，推移的な集合 T と同型写像

$$\pi : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T, \in \rangle$$

がとれる．とくに $\in$ は T 上の整列順序となっている．さらに，ここでの π と T は一意に決まる．

T は $\langle X, < \rangle$ のモストフスキー像とよばれ，π はモストフスキー同型写像とよばれる．

証明 (Step I): まず，このような T と π が存在するとすればその存在は一意であることを示す．そうでなかったとして，$\pi : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T, \in \rangle$ と $\pi' : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T', \in \rangle$ を異なる同型写像とする．このとき，

$$\{x \in X : \pi(x) \neq \pi'(x)\}$$

は空でないから，最小元 x_0 を持つ．

もし，x_0 が X の最小元なら，$\pi(x_0)$ も $\pi'(x_0)$ も T の最小元となるから，補題 2.16, (0) により， $\pi(x_0) = \emptyset = \pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし，x_0 が，ある $y \in X$ の次の元なら，x_0 の最小性から，$\pi(y) = \pi'(y)$ となる．π は同型写像だから，$\pi(x_0)$ は $\pi(y)$ の T での次の元となる．したがって，補題 2.16, (2) により，$\pi(x_0) = \pi(y) \cup \{\pi(y)\}$ となることがわかる．同様に，$\pi'(x_0) = \pi'(y) \cup \{\pi'(y)\}$ となる．したがって，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし x_0 が極限点なら，x_0 の最小性から，$\pi \restriction X_{<x_0} = \pi' \restriction X_{<x_0}$ となるが，x_0 は $X_{<x_0}$ の最小上界で，π が同型写像であることから，$\pi(x_0)$ も，$\pi'' X_{<x_0}$ の最小上界である．また，$X_{<x_0}$ は X の始片だから，$\pi'' X_{<x_0}$ も T の（$\in$ に関する）始片となり，したがって推移的である．よって，補題 2.16, (3) により $\pi'' X_{<x_0} = \pi(x_0)$ である．同様に，$\pi''' X_{<x_0} = \pi'(x_0)$ となるから，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となり矛盾である．

(Step II): 次に，命題

(2.12) すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，

$$\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in \rangle$$

となる写像 π_x が存在する．さらに，ここでの π_x と T_x は一意に決まる．

を $x \in X$ に関する帰納法で示す．一意性は (Step I) でと同様に証明できるので，命題の前半の帰納法による証明を与える：

(IIa): $x \in X$ が X の最小元であるときには，$X_{<x} = \emptyset$ だから $T_x = \emptyset$, $\pi = \emptyset$ とすればよい．

(IIb): ある $x \in X$ に対し，推移的な T_x と $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるような写像，π_x の組がとれない，とすると，そのような x のうちで最小のものがとれる．これを x_0 とすると，x_0 の最小性から，すべての $x < x_0$（つまり $x \in X_{<x_0}$）に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるものがとれる．(IIa) により，x_0 は X の最小元ではないから，$X_{<x_0} \neq \emptyset$ である．

(IIb1): x_0 がある $x^* \in T$ の次の元だとすると，$\pi_{x_0} = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*} \rangle\}$ とすれば，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0} \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}, \in \rangle$$

となるが，補題 2.15, (1) により $T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ は推移的だから，これは x_0 のとり方に矛盾である．

(IIb2): x_0 が極限点だとすると，(Step I) を各 $x < x_0$ に対する T_x, π_x に適用すると，$x < y < x_0$ なら，$\pi_y \restriction X_{<x}$ が $\langle X_{<x}, < \rangle$ から，$\langle \pi_y{}'' X_{<x}, \in \rangle$ への同型写像となっていることから，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，$\pi_{x_0} = \bigcup\{\pi_x : x < x_0\}$ とすると，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \bigcup\{T_x : x < x_0\}$$

となるが，補題 2.15, (2) により，$\bigcup\{T_x : x < x_0\}$ は推移的だから，これは，x_0 のとり方に矛盾である．

(Step III): (2.12) により，すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるものが存在して，一意性より，x, $y \in X$, $x < y$ なら，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，$\langle X, < \rangle$ が最大元 x^* を持つ場合には，$\pi = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*} \rangle\}$, $T = T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ とすれば，(IIb1) と同様に，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる．$\langle X, < \rangle$ が最大元を持たない場合には，$\pi = \bigcup_{x \in X} \pi_x$, $T = \bigcup_{x \in X} T_x$ とすると，(IIb2) でと同様に議論して，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる．　　　(証明終わり)

上の証明を詳しく調べてみると，いくつかの個所で置換公理が本質的に使われていることがわかる．実際，定理 3.13 の後で見るように，上の定理 2.17

は，置換公理なしでは証明できないことが示せる．

補題 2.18　$\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として，Y を X の始片とする．（したがって $\langle Y, <\rangle$ も整列順序集合である．）$\pi_X : \langle X, <\rangle \to \langle T, \in\rangle$ と $\pi_Y : \langle Y, <\rangle \to (S, \in)$ をこれらに属するモストフスキー同型写像とする．このとき $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ となり，したがって $S \subseteq T$ で，S は T の $\in$ に関する始片となる．

証明　$\pi_X \restriction Y : \langle Y, <\rangle \xrightarrow{\cong} (\pi'' Y, \in)$ はモストフスキー同型写像となる．したがって，定理 2.17 でのモストフスキー同型写像の一意性から $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ である．よって，$S = \pi_Y{}'' Y = \pi_X{}'' Y \subseteq T$ で π_X は同型写像だから，S は T の $\in$ に関する始片となることがわかる．(証明終わり)

2.3　順序数

順序数 (ordinals) のクラス On を導入する．次の性質を On が持つことがポイントとなる．

(2.13)　On は真のクラスで，推移的で[14)]，$\in$ に関し整列順序となっている[15)]．

(2.14)　各順序数 α は,（推移的な）集合で,（$\in$ により）整列されている．

(2.15)　任意の整列順序集合 $\langle X, <\rangle$ は，一意に決まる順序数 $\langle \alpha, \in\rangle$ と順序同型となる．

これらの性質，特に最後の (2.15) により，順序数の全体のクラスは，すべての整列順序集合のクラスの（順序同型に関する同値類の）自然な代表元を集めたクラスとみなせる．

14)　つまり，$\alpha \in On$ で $\beta \in \alpha$ なら $\beta \in On$ が成り立つ．
15)　つまり，$\in$ は On 上線型順序となり，On のどの部分クラスも，$\in$ に関する最小元を持つ．

この節での議論は，とくに別に指定しないかぎり，基礎の公理を用いないものとなっているが，順序数の理論を基礎の公理を用いずに導入しておくことで，基礎の公理の累積的階層による特徴付け（系 2.26）や，基礎の公理のそれ以外の ZF の公理上の無矛盾性の証明（定理 3.10）が可能となる．

推移的な集合 α が $\in$ により整列されているとき，α は順序数であるという．

$$On = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数 }\}$$

として[16]，

(2.16) $\alpha, \beta \in On$ に対し，$\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta$

として On 上の関係 $<$ を定義する．以下の補題 2.20 で示されるように，$<$ は On 上の全順序となる．

補題 2.19 α が順序数となるのは，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となる，ちょうどそのときである．

証明 モストフスキー像の定義から，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となるなら，α が順序数となることは明らかである．逆に α が順序数なら，$\langle \alpha, \in \rangle$ は整列順序集合で，$\langle \alpha, \in \rangle$ は自分自身のモストフスキー像である． (証明終わり)

任意の整列順序集合 $\langle X, <_X \rangle$ に対し，$\langle X, <_X \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ となる $\alpha \in On$ はモストフスキーの定理により一意に決まるが，このような α を $\langle X, <_X \rangle$ の順序型とよび，$otp(\langle X, <_X \rangle)$ で表わす．ただし，X 上の順序 $<_X$ が何かが文脈から明らかなときには，簡単のために $otp(X)$ と書くことにする．

補題 2.20 (1) $\beta \in \alpha \in On$ なら $\beta \in On$ である．したがって，On は推移的なクラスである．

(2) $\alpha \in On$ なら，$\alpha = \{\beta \in On : \beta < \alpha\}$ となる．

16) 順序数の全体をあらわす記号としては，“On” ではなく “Ord” が使われることもある．

(3)　$\alpha, \beta \in On$ に対し，$\alpha = \beta$ または，$\alpha \subsetneqq \beta$ または $\beta \subsetneqq \alpha$ のいずれかが成り立つ．

(4)　$\alpha \in On$ なら $\alpha \notin \alpha$ である．

(5)　$\alpha, \beta \in On$ に対し，$\beta < \alpha \ \Leftrightarrow\ \beta \subsetneqq \alpha$ が成り立つ．

(6)　M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M \in On$ となり，さらに（上の (2.16) で定義した $<$ に関し）$\bigcup M = \sup M$ である．

(7)　$X \subseteq On$ が On で共終[17)]なら X は真のクラスである．とくに，On は真のクラスである．

証明　(1): $\beta \in \alpha \in On$ とすると，補題 2.16 (1) により，β は推移的で，二項関係 $\in$ は β 上の線形順序になっている．さらに，補題 2.1 により，$\in$ は β 上の整列順序でもある．

(2): $\alpha = \{x : x \in \alpha\}$ だから，(1) により，$\alpha = \{\beta \in On : \beta \in \alpha\}$ である．

(3): 定理 2.9 により，α と β は同型であるか，α は β の真の始片と同型であるか，β は α の真の始片と同型であるかのいずれかが成り立つ．ここで α と β が同型なら，α と β は両方とも α のモストフスキー像になるから，モストフスキー同型写像の一意性から $\alpha = \beta$ である．

もし α が β の真の始片 γ と同型なら，α と γ はともに α のモストフスキー像となるから，$\alpha = \gamma$ である．したがって $\alpha \subsetneqq \beta$ が成り立つ．

同様にして，β が α の真の始片と同型なら，$\beta \subsetneqq \alpha$ となることがわかる．

(4): もし $\alpha \in \alpha$ だったとすると，α の元 x で $x \in x$ となるものが存在することになるが（α 自身がそのようなものになっている），これは $\in$ が α 上の全順序になっていることに矛盾する．

(5): $\beta < \alpha$ つまり，$\beta \in \alpha$ なら，α の推移性から，$\beta \subseteq \alpha$ となる．(4) により，$\beta \in \alpha \setminus \beta$ だから，$\beta \subsetneqq \alpha$ である．

逆に，$\beta \subsetneqq \alpha$ だったとする．ξ を，$\alpha \setminus \beta$ の $\in$ に関する最小元とする．$\eta \in \xi$ なら $\eta \in \alpha$ だから，ξ の最小性から $\eta \in \beta$ である．したがって，$\xi \subseteq \beta$ で

17)　$\langle Y, < \rangle$ を半順序集合（またはクラス）とするとき，$Y' \subseteq Y$ が Y で共終とは，すべての $y \in Y$ に対し，$y' \in Y'$ で $y \leq y'$ となるものが存在することである．

ある．$\eta \in \beta$ なら，$\eta \notin \alpha \setminus \beta$ だから，$\eta \neq \xi$ である．$\in$ は α 上の全順序となっているから，$\eta \in \xi$ または $\xi \in \eta$ が成り立つが，もし $\xi \in \eta$ だったとすると，β が推移的であることがから，$\xi \in \beta$ となり，ξ のとり方に矛盾する．したがって $\beta \in \xi$ である．よって，$\beta \subseteq \xi$ も示せたので，$\beta = \xi < \alpha$ である．

(6): M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M$ が推移的で $\in$ により整列されることは補題 2.15 (2) と本補題の (3),(5) から示せる．したがって，$\bigcup M \in On$ である．$\beta \in M$ なら，$\beta \subseteq \bigcup M$ だから，(5) により，$\bigcup M$ は，M の（$<$ に関する）上界になっている．これが M の最小上界となることも (5) により明らかである．

(7): $X \subseteq On$ が On で共終とすると，(2) により，$On = \bigcup X$ である．したがって，X が集合だったとすると，(6) により $On \in On$ となってしまうが，これは (4) に矛盾である． (証明終わり)

補題 2.21

(1)　On 上の関係 $\in$（つまり (2.16) で定義した On 上の関係 $<$）は，On 上の全順序となる．

(2)　$<$ は On 上の整列順序である．つまり，任意の空でないクラス $C \subseteq On$ に対し，$\bigcap C \in On$ となり，$\bigcap C = \min C$ が成り立つ．

(3)　$0 = \emptyset$ は順序数で，$<$ に関して On の最小元となる．

(4)　$\alpha \in On$ なら，$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \in On$ となり，$\alpha + 1$ は，$\langle On, < \rangle$ での α の次の元である．

証明　(1): 補題 2.20 (3), (5) によりよい．

(2): $\bigcap C$ は (1.21) での議論により集合となる．これが推移的で，$\in$ によって整列されることも容易に示せるから，$\bigcap C \in On$ である．補題 2.20, (5) により，$\bigcap C$ は C の最大下界である．

(3): $\emptyset$ が順序数であることはよい（順序数の定義は $\emptyset$ に対して vacantly に成り立つ）．補題 2.20, (5) により，$\emptyset$ は（$<$ に関する）On の最小元である．

(4): $\alpha+1$ は補題 2.15, (1) により推移的である．これが $\in$ によって整列されることも容易に確かめられるから，$\alpha + 1 \in On$ がわかる．補題 2.16, (2)

により，$\alpha+1$ は α の次の元である．　(証明終わり)

補題 2.21 により，$0=\emptyset$, $1=0+1$, $2=1+1$, $\ldots$ が On の元となる．$n=\{0,1,\ldots,n-1\}$ である[18]．

$\alpha \in On$ は，$\alpha \neq \emptyset$ で最大元を持たないとき極限順序数であるという．α, $\beta \in On$ で，$\beta < \alpha$ のとき，β が極限順序数であることと，β が $\langle \alpha, < \rangle$ の極限点であることは同値である．順序数 α が極限順序数でないとき，後続順序数であるという．

極限順序数の概念を使って自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義することができる：$n \in On$ が自然数であるとは，n は 0 または後続順序数で n のすべての要素も後続順序数であること，とできるからである．

補題 2.22　(1)　自然数の要素は自然数である．

(2)　集合 X を $\emptyset \in X$ ですべての $y \in X$ に対し $y \cup \{y\} \in X$ となるようなものとすると，X はすべての自然数を含む．

補題 2.22, (2) でのような X は無限公理により存在するから，分出公理により，

$$\mathbb{N} = \{n \in On : n \text{ は自然数 }\}$$

は集合になる．また，補題 2.22, (2) により，p.10 で導入した 0, 1, 2,... は $\mathbb{N}$ の最初の方の要素になっていることがわかる．自然数の定義から $\mathbb{N} \subseteq On$ で補題 2.22, (1) により，$\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ となるから，補題 2.20, (6) により，$\mathbb{N} \in On$ となる．集合論では，$\mathbb{N}$ が順序数であることを強調するときには，“$\mathbb{N}$” でなく，“ω” で自然数の全体をあらわすことが多い．

補題 2.22 の証明は，以下に述べる On 上の帰納法の説明の後まで保留する．

補題 2.20, (7) で見たように，On は真のクラスであるが，On 上でも定理 2.10 や，定理 2.12 でのような帰納法による証明や，関数[19]の帰納的定義が

18)　ここでの $n-1$ は数表記としての $n-1$ である！

19)　定義域がクラスであるような関数は，英語では “functional” とよばれることある．たとえば，クラス X が $X=\{x : \varphi(x)\}$ として導入されているときには，X 上の関数とは，$\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \exists! y\,(\psi(x,y)))$ が ZFC（ないし，そこで問題となっている ZFC の部分あるいは拡張）から証明できるような，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\psi(x,y)$ のこと，あるいは，これに対

可能である[20].

定理 2.23　(1)　$\varphi(x)$ を（パラメタを持つ）$\mathcal{L}_\in$ の論理式として,

$$(2.17)\quad (\forall\alpha\in On)((\forall\beta<\alpha)\varphi(\beta)\ \rightarrow\ \varphi(\alpha))$$

が成り立つなら, $(\forall\alpha\in On)\varphi(\alpha)$ が成り立つ.

(2)　クラス D を,

$$D=\{f\,:\,f\text{ は, ある }\alpha\in On\text{ に対し }dom(f)=\alpha\text{ となる関数}\,\}$$

と定義して, G を D 上の関数[21]とするとき, On 上の関数 F で, すべての $\alpha\in On$ に対し,

$$(2.18)\quad F(\alpha)=G(F\restriction\alpha)\text{ となるようなものが一意に存在する}^{22)}.$$

証明　(1): そうでないとすると, $\alpha\in On$ で, $\varphi(\alpha)$ とならないようなものが存在する. したがって, 補題 2.21, (2) により, そのようなもののうちで最小なもの α_0 が存在する. α_0 の最小性から, $\forall\beta<\alpha_0\varphi(\beta)$ となるから, (2.17) により, $\varphi(\alpha_0)$ が成り立つが, これは, α_0 のとり方に矛盾である.

(2): 一意性は定理 2.17 と同様に示せるから, F の存在を示せばよい.

まず, 置換公理を用いれば, 定理 2.12 を次の形に変更しても, 定理 2.12 と全く同じ証明で示せることを確認しておく（註 13 を参照）:

定理 2.12' $\langle X,<\rangle$ を整列順序集合として, クラス G を,

応するクラス $\{\langle x,y\rangle : \varphi(x)\ \wedge\ \psi(x,y)\}$ のこと, とする. ただし, $\varphi(x)$ も $\psi(x,y)$ も, x と y 以外の自由変数をパラメタとして含んでいることもありえる. また, “$\exists!x$” という記法については, p.20 の脚注を参照されたい. 本稿では定義域が真のクラスとなっていて, したがって自分自身も真のクラスとなっているような関数のことをクラス関数とよぶことにする.

20)　帰納的関数論の用語では, これは「関数の再帰的定義」と言うべきであろう. しかし, 集合論では, このような文脈でも「帰納的定義」という言いかたをすることが多い.（クラス）関数の存在定理としては以下の (2.18) のような再帰的な規定となっても, 実際の運用では, たとえば以下での $V(\alpha)$, $\alpha\in On$ の導入 (2.22)〜(2.24) でのような超限帰納法による帰納的構成の形をとることが多い, ということが, その背景である.

21)　ここでの “関数” は, 脚注 19 の意味である.

22)　置換公理により, $F''\alpha$ は集合になるから, $F\restriction\alpha\subseteq\alpha\times F''\alpha$ も集合となることに注意する.

$$dom(G) = \{f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片上の関数 }\}$$

となるような関数とする．このとき，X 上の関数 F で，すべての $x \in X$ に対し，

(2.19)　$F(x) = G(F \restriction X_{<x})$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する．

(2) の証明を続ける．各 $\alpha \in On$ に対し，

$$D_\alpha = \{f : f \text{ は，ある } \beta \in \alpha \text{ に対し } dom(f) = \beta \text{ となる関数 }\}$$

として，$G \restriction D_\alpha$ に対し，定理 2.12' を適用すると，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$F'(\beta) = G(F' \restriction \beta)$ となるような α 上の関数 F' が一意に存在することがわかる．したがって，

(2.20)　$F = \{\langle \beta, F'(\beta) \rangle : F'$ は，ある $\alpha \in On, \beta < \alpha$ 上の関数で
すべての $\xi < \alpha$ に対し $F'(\xi) = G(F' \restriction \xi)\}$

とすれば，F は求めるようなものとなる．

(証明終わり)

ここで，保留にしてあった補題 2.22 の証明を見てみることにする．

補題 2.22, (1) は自然数の定義から明らかである．

補題 2.22, (2) は $\mathbb{N}$ が集合となることの議論の前に証明される必要があるので，整列集合上の帰納法による証明ではなく，定理 2.23, (1) のタイプの帰納法で示す必要がある．このために，X を補題 2.22, (2) でのようなものとして，

(2.21)　$\alpha \in On$ に対し，α が自然数なら $\alpha \in X$ となる．

を $\alpha \in On$ に関する帰納法で示す[23)]．$\alpha = 0$ のときは，主張は明らかである．$\alpha \neq 0$ で，すべての $\beta < \alpha$ に対し主張が成りたったとする．α が自然

23)　これは定理 2.23, (1) との関係で言うと，そこでの $\varphi(\alpha)$ を "α は自然数 $\rightarrow \alpha \in X$" としたとき，(2.17) が成り立つことを示す，ということである．

数でないときには主張が成り立つことは自明である．α が自然数なら， α は後続順序数だから，$\alpha = \alpha^- + 1$ となる α^- がとれるが，補題 2.22, (1) により，α^- も自然数である．したがって，帰納法の仮定から $\alpha^- \in X$ となり，X に対する仮定から，$\alpha = \alpha^- + 1 = \alpha^- \cup \{\alpha^-\} \in X$ となる．したがって，補題 2.22, (2) が示せた．

定理 2.23 の応用の 1 つとして，集合の累積的階層の定義を見ることにする．On 上のクラス関数 $V(\alpha)$ を，

(2.22)　$V(0) = \emptyset$;

(2.23)　$V(\alpha+1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$;

(2.24)　γ が極限順序数のとき， $V(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} V(\alpha)$

によって定義する[24]．$V(\alpha)$ を V_α とも書くことにする． $\alpha \mapsto V_\alpha, \alpha \in On$ を V の累積的階層とよぶ[25]．実際，次の補題 2.24 で示すように $\alpha \mapsto V_\alpha$, $\alpha \in On$ は増加的で，基礎の公理のもとでは，V_α, $\alpha \in On$ は V の被覆となる．

ZF から基礎の公理を除いてできる体系を ZF^- と表わすことにする．本節のここまでの部分で順序数の定義や基本的な性質の証明では基礎の公理は用いられていなかったことを再度注意しておく．

補題 2.24　 ZF^- で議論する．

(1)　すべての $\alpha \in On$ に対し， V_α は推移的である．

(2)　すべての $\alpha, \beta \in On, \beta < \alpha$ に対し，$V_\beta \subseteq V_\alpha$ である．

(3)　すべての $\alpha \in On$ に対し，$V_\alpha \cap On = \alpha$ である．

(4)　基礎の公理が成り立つとき，$V = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ となる．

24)　定理 2.23, (2) との対応では，$F = \{\langle\alpha, V(\alpha)\rangle : \alpha \in On\}$ は，

(2.25)　$G_0 = \{\{\langle\emptyset, \emptyset\rangle\}\}$;

(2.26)　$G_1 = \{\langle f, \mathcal{P}(f(\alpha))\rangle : \alpha \in On,\ f$ は $\alpha+1$ 上の関数 $\}$;

(2.27)　$G_2 = \{\langle f, \bigcup f''\gamma\rangle : \gamma$ は極限順序数で f は γ 上の関数 $\}$

として，$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ として，この G に定理 2.23, (2) を適用することで得られる．(2.25), (2.26), (2.27) はそれぞれ，(2.22), (2.23), (2.24) に対応していることに注意する．

25)　V は，ここではすべての集合からなるクラス $\{x : x = x\}$ を表している（第 1.3 節の初めの議論を参照）．

証明　(1), (2), (3) は α に関する帰納法により示せる．(4)　: $V \neq \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ だったとして，x を $V \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha\right)$ の元のうち $\in$ に関して極小なものとする[26]．このとき，x の極小性から，すべての $y \in x$ に対し $y \in \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ となる．したがって $x \subseteq \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ である．x は集合だから，(2) により，十分に大きな $\alpha \in On$ をとると $x \subseteq V_\alpha$ となる．したがって，(2.23) により $x \in V_{\alpha+1}$ となるが，これは x の選び方に矛盾である．　(証明終わり)

集合 X 上の二項関係 R は,

$$(2.28)\quad (\forall Y \subseteq X)\Big(Y \neq \emptyset \ \rightarrow\ (\exists y \in Y)(\neg\exists z \in Y(z\, R\, y))\Big)$$

を満たすとき，整順的であるという．(2.28) でのような y のことを Y の R に関する極小元とよぶことにする．

この用語を使うと，基礎の公理は，すべての集合 x に対し，関係 $\in$ が x 上で整順的である[27]，という主張としてとらえることができる．

補題 2.25　ZF^- で議論する．

(1)　$x \in V_\alpha$ で $y \in x$ なら，$y \in V_\beta$ となる $\beta < \alpha$ が存在する．

(2)　任意の $\alpha \in On$ に対し，$\in$ はすべての $x \in V_\alpha$ 上で整順的である．

証明　(1): α が極限順序数なら，(2.24) により，$\beta < \alpha$ で $x \in V_\beta$ となるものがとれる．補題 2.24, (1) により，$x \subseteq V_\beta$ だから，$y \in V_\beta$ となる．α が極限順序数でないなら，$\alpha = \beta + 1$ となる順序数 β をとると，(2.23) により，$x \subseteq V_\beta$ である．したがってこの場合にも $y \in V_\beta$ がわかる．

(2): $x \in V_\alpha$ とする．$y \subseteq x$ を空でないとすると，補題 2.24, (1) により $y \cap V_\alpha = y \neq \emptyset$ だから，$\alpha_0 = \min\{\beta \leq \alpha : y \cap V_\beta \neq \emptyset\}$ がとれる．$z \in y \cap V_{\alpha_0}$ とすると，z は y の $\in$ に関する極小元である：$w \in z$ とすると，(1) により，ある $\beta < \alpha_0$ に対し $w \in V_\beta$ となるから，α_0 の最小性から $w \notin y$ である．　(証明終わり)

系 2.26　ZF^- 上，基礎の公理と $V = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ は同値である．

---

26)　(1.22) を参照.

27)　つまり，$\in \cap\, x^2$ は x 上で整順的である.

証明　補題 2.24, (4) と補題 2.25, (2) による．　(証明終わり)

定理 2.10, 定理 2.12, 定理 2.17 は，それぞれ整順的な関係に関する定理に一般化できる．

集合 X 上の二項関係 E と $x \in X$ に対し，

(2.29)　$ext_E(x) = \{y \in X : y \; E \; x\}$

とする．$ext_E(x)$ は x の E に関する外延とよばれる．E が外延的とは，すべての $x, y \in X$ に対し，

(2.30)　$x = y \;\Leftrightarrow\; ext_E(x) = ext_E(y)$

が成り立つこととする．X 上で $\in$ が外延的になるとき，X は外延的であるということにする[28]．

定理 2.27 (整順的な関係上の帰納法)　E を集合 X 上の整順的な関係とする．Φ を（パラメタを含む）$\mathcal{L}_{\in}$-論理式として，

(2.31)　X の E に関する極小元は Φ を満たし;

(2.32)　すべての $x \in X$ に対し，$ext_E(x)$ の元がすべて Φ を満たすなら x も Φ を満たす

が成り立つとする．このとき，すべての $x \in X$ は Φ を満たす．

証明　定理 2.10 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

定理 2.28 (関数の再帰的定義)　E を集合 X 上の整順的関係として，G を $V \times V$ 上のクラス関数とする．このとき，このとき X 上の関数で，

(2.33)　$F(x) = G(x, F \restriction ext_E(x))$

がすべての $x \in X$ に対し成り立つようなものが一意に存在する．

証明　定理 2.12 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

28)　3.3 節で導入することになるモデル理論の用語を用いると，X が外延的とは，$\langle X, \in \rangle$ が外延性公理を満たすことに他ならない．

定理 2.29 (モストフスキーの崩壊補題)　E を集合 X 上の外延的な整順的関係とする．このとき，推移的な集合 M と写像 $\pi : X \to M$ で，

$$\pi : \langle X, E\rangle \overset{\cong}{\to} \langle M, \in\rangle$$

となるものが一意に存在する．

証明　定理 2.17 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

定理 2.29 での M （または π）を $\langle X, E\rangle$ のモストフスキー崩壊とよぶ．

補題 2.30　X を集合として X は外延的であるとする．$x \in X$ で $tcl(x) \subseteq X$ とする．このとき π を $\langle X, \in\rangle$ のモストフスキー崩壊とすると，$\pi \restriction tcl(x)$ は $tcl(x)$ 上の恒等写像となる．

証明　$tcl(x)$ は推移的だから，$id_{tcl(x)} : tcl(x) \to tcl(x)$ は $\langle tcl(x), \in\rangle$ のモストフスキー崩壊になっている．一方，$\pi \restriction tcl(x)$ も $tcl(x)$ のモストフスキー崩壊だから，モストフスキー崩壊の一意性により，$\pi \restriction tcl(x) = id_{tcl(x)}$ である．　(証明終わり)

定理 2.27, 定理 2.28, 定理 2.29 はそれぞれ X がクラスである場合に拡張できるが，この場合には，整順的な関係の定義を次のように補正しておく必要がある：

クラス X 上の二項関係 R が整順的とは,

(2.34)　(2.28) の条件を満たし,

(2.35)　すべての $x \in X$ に対し $ext_E(x)$ が集合になる

こととする．もちろん，(2.35) は X が集合の場合には無条件に成り立つ．

2.4　基数

この章では基数の全体のクラス $Card$ を順序数の全体のクラスの部分クラスとして導入する．自然数 n に対し，$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ だったことを思

い出すと，集合 E が n 個の要素を持つ有限集合である（記号：$|\,E\,| = n$），という概念を

$$(2.36)\quad |\,E\,| = n \;\Leftrightarrow\; E \text{ から } n \text{ への全単射が存在する}$$

により定義してよいであろう．基数の概念はこの有限集合の要素の個数の定義の拡張から自然に導入されるものになっている．

"整列可能性定理" として知られる次の命題は,（集合論の他の公理の仮定のもとで）選択公理と同値になる．

定理 2.31 (整列可能性定理)　ZFC のもとで，すべての集合 X に対し，$\langle X, < \rangle$ が整列順序となるような X 上の二項関係 $<$ が存在する．

ZF 上で整列可能性定理の命題を仮定すると，AC が示せることは容易に見ることができる：整列可能性定理を仮定すると，x が空集合を要素として含まない集合とするとき，$\bigcup x$ 上の整列順序 $<$ が存在するが,

$$f = \{\langle y, z\rangle : y \in x,\ z \text{ は } y \text{ の } < \text{ に関する最小元}\}$$

とすると，f は x 上の選択関数となる．整列可能性定理の ZFC からの証明は次のようにして行なうことができる：

定理 2.31 の証明　x を任意の集合とする．$x \neq \emptyset$ としてよい．f を $\mathcal{P}(x)\setminus\{\emptyset\}$ 上の選択関数として，定理 2.23, (2) を用いて，On 上のクラス関数 g を,

$$(2.37)\quad g(\alpha) = \begin{cases} f(x \setminus \{g(\beta) : \beta < \alpha\}), & x \setminus \{g(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ x, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とする．このとき，$\{\alpha \in On : g(\alpha) = x\}$ が空だとすると，g は On から x への 1 対 1 写像となってしまい x が集合であることに矛盾である．$\alpha = \min\{\alpha \in On : g(\alpha) = x\}$ とすると，$g_0 = g \restriction \alpha$ は α から x への全単射となるから，すべての $u \in x$ に対し，$\beta_u < \alpha$ で $g_0(\beta_u) = u$ となるものが一意に存在する．ここで $u_0, u_1 \in x$ に対し

$$u_0 \leq u_1 \quad\Leftrightarrow\quad \beta_{u_0} \leq \beta_{u_1}$$

として x 上の二項関係 $\leq$ を定義すれば，$\leq$ は x 上の整列順序となる．

(証明終わり)

整列可能性定理のもとで（したがって選択公理のもとで），任意の集合 X の濃度 $|X|$ を次のように定義することができる：

(2.38)　$|X| = \min\{\alpha \in On : X$ から α への全単射が存在する $\}$.

$|X| = \kappa$ のとき，X は濃度 κ を持つ，あるいは X は濃度 κ である，などという．整列可能性定理により，$\langle X, < \rangle$ が整列順序になるような，X 上の二項関係 $<$ が存在するが，$\langle X, < \rangle$ のモストフスキー像を α とすると，$\alpha \in On$ で，モストフスキー同型写像は，X から α への全単射である．したがって，$\{\alpha \in On : X$ から α への全単射が存在する $\}$ は空集合でなく，上の $|X|$ はすべての集合に対し，うまく定義できる．集合の濃度となるような On の元 κ は，

(2.39)　すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への全単射は存在しない

という性質を満たすが，このような κ のことを基数とよぶ[29)]．

(2.40)　$Card = \{\kappa : \kappa$ は基数 $\}$

とする．以下で述べるカントル・ベルンシュタインの定理（定理 2.33）により，κ が基数であることと，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への上射が存在しないことは同値である．

次の 2 つの命題は，集合の濃度や基数に関する基本的な性質である．補題 2.32 で x を可算集合としたものは，カントルにより 1873 年に発見された[30)]．この発見によって集合論が数学の研究分野として確立された，とする数学史における解釈も可能である（[Kanamori 1994/2003] を参照）．

29)　この基数の定義自体は選択公理の仮定に依存していないことを注意しておく．

30)　x が可算なときには，$\mathcal{P}(x)$ から $\mathbb{R}$ への自然な単射により，$\mathcal{P}(x)$ と実数体 $\mathbb{R}$ が同一視できることに注意する．

補題 2.32　x を集合とするとき，単射 $f : x \to \mathcal{P}(x)$ や全単射 $g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2$ が存在するが[31]，上射 $h : x \to \mathcal{P}(x)$ は存在しない（したがって，もちろん全単射も存在しない）．

証明　$f : x \to \mathcal{P}(x); a \mapsto \{a\}$ は単射である．$g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2; y \mapsto ch_y$ は全単射である．ただし，$ch_y : x \to 2$ は，y の特性関数とする．つまり，$a \in x$ に対し，

$$ch_y(a) = \begin{cases} 1 & a \in y \text{ のとき} \\ 0 & a \notin y \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される関数である．

最後に $h : x \to \mathcal{P}(x)$ が上射だったとして矛盾を導く．

$$y = \{a \in x \,:\, a \notin h(a)\}$$

とする．$y \in \mathcal{P}(x)$ である．h は上射だから，$a^* \in x$ で，$h(a^*) = y$ となるものが存在する．

もし，$a^* \in y$ とすれば，y の定義から，$a^* \notin h(a^*) = y$ となり矛盾である．

一方 $a^* \notin y$ としても，y の定義から，$a^* \in h(a^*) = y$ となってしまい矛盾である．　(証明終わり)

定理 2.33 (カントル・ベルンシュタインの同値定理)　A と C を集合として，$g : A \to C$ と $h : C \to A$ を単射とする．このとき，A から C への全単射が存在する．

証明　この定理は選択公理を用いずに証明できるが，まず，選択公理を用いた証明を見ておくことにする[32]．

$C' = g''A$ として，R' を C' 上の整列順序とする[33]．

31)　$2 = \{0, 1\}$ で ${}^{x}2 = \{f \,:\, f : x \to 2\}$ だった．

32)　ゲーデルは，[Gödel 1947/64] で「新しい公理なしでも証明できる緒帰結のうちに，新しい公理の助けを借りた方がずっと簡単に証明でき，証明自体はるかに発見しやすくなり，さらには多くの別証明をひとつの証明へと簡略化できるようになるものものがある」ことは，その公理の実証的な正しさに対する保証ととらえることが可能である場合もありえる，と論じている（本書第 II 部の第 1 章を参照.）．この定理の証明や，補題 2.36 の証明は，この意味での選択公理の正しさに関する実証的な保証の一例と見ることもできるであろう．

R'' を $C \setminus C'$ 上の整列順序として[33)],

$$< \ = \ R' \cup R'' \cup \{\langle c', c'' \rangle : c' \in C', c'' \in C \setminus C'\}$$

とすると，$<$ は C 上の整列順序になり，C' は $<$ に関して C の始片となる．したがって，$\pi : \langle C, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle \alpha, \in \rangle$ をモストフスキー写像とすると，$\beta = \pi'' C'$ は α の始片となるから，$\beta \leq \alpha$ である．$\pi \circ g : A \to \beta$ は全単射だから，$|\,A\,| \leq \beta$ となる．したがって，$|\,A\,| \leq |\,C\,|$ である．h を用いて同様に議論すると $|\,C\,| \leq |\,A\,|$ がわかるから，$|\,A\,| = |\,C\,|$ である[34)]．したがって，$j : A \to |\,A\,|$ と，$k : C \to |\,C\,|$ をそれぞれ全単射とすると，$f = k^{-1} \circ j$ は A から C への全単射となる．

選択公理を用いない定理 2.33 の証明は，上のものより構成的だが，いくぶん複雑なものになる．以下でこの証明のスケッチを与える： まず，A と $C' = g'' A$ を同一視することにより，$A \subseteq C$ で $g = id_A$ としてよい．$C'' = h'' C$ とすると，h は C から C'' への全単射で，$C'' \subseteq A \subseteq C$ となる．$n \in \omega$ に関する帰納法で，$D_0 = C \setminus A$, $D_{n+1} = h'' D_n$ とする．このとき， $C \setminus \bigcup_{n \in \omega} D_n \subseteq C \setminus D_0 \subseteq A$ で，$n > 0$ なら，D_n は C の部分集合の h による像であるから，$D_n \subseteq A$ となることに注意して，$f : C \to A$ を，$x \in C$ に対し，

$$(2.41) \quad f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ある } n \in \omega \text{ に対し } x \in D_n \text{ のとき} \\ x, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とすると，f は全単射となる．したがって f^{-1} が求めるようなものとなっている． (証明終わり)

補題 2.34 (1) 自然数はすべて基数である．最小の無限順序数 ω は基数である．

(2) すべての無限基数は，極限順序数である．

(3) M が基数の集合なら，$\sup M$ $(= \bigcup M)$ は基数である．

---

33) R' と R'' の存在を保証するために選択公理が用いられていることに注意する．

34) ここで “$\leq$” は $Card$ 上の線型順序となっていることが用いられている．

証明　(1): 基数でない自然数があったとして，そのようなもののうち最小な n をとる．このとき $m < n$ で上射 $f : m \to n$ の存在するものがとれる．$m < n$ により $n \neq 0$ だから，$n = n^* \cup \{n^*\}$ となる $n^* < n$ がとれる．また，上射 $f : m \to n$ の存在により，$m \neq 0$ だから，同様に $m = m^* \cup \{m^*\}$ となる $m^* < m$ がとれる．必要なら f の 2 個所での値を変更することで，$f(m^*) = n^*$ となっているとしてよい．このとき，$f' : m^* \to n^*$ を

$$f'(k) = \begin{cases} f(k) & f(k) < m^* \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f' は m^* から n^* への上射となるが，$m^* < n^* < n$ だから，これは n の最小性に矛盾である．

もしも ω が基数でなかったとすれば，ある自然数 n で上射 $f : n \to \omega$ の存在するようなものがとれる．$\ell < n$ に対し，$f'(\ell) = \min\{n, f(\ell)\}$ として $f' : n \to n+1$ を定義すると f' は上射となるが，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは，ここでの証明の前半に矛盾する．

(2): α を無限順序数とする（つまり $\omega \leq \alpha$）．このとき α から $\alpha + 1$ への写像 f を

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta - 1 & 0 < \beta < \omega \text{ のとき} \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \text{ のとき} \\ 0 & \beta = \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f は全単射となる．したがって $\alpha + 1$ は基数ではない．

(3): M が最大元 κ^* を持つときは $\bigcup M = \kappa^*$ となるから，主張は明らかに成り立つ．M が最大元を持たないとする．$\bigcup M$ が順序数であることは補題 2.20, (7) によりよい．したがって，$\bigcup M$ が基数でなかったとすると，ある基数 $\kappa < \bigcup M$ で，上射 $f : \kappa \to \bigcup M$ の存在するものがある．$\kappa < \lambda$ となる $\lambda \in M$ をとると $\lambda \leq \bigcup M$ だから，$f' : \kappa \to \lambda$ を $\alpha \in \kappa$ に対し，

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & f(\alpha) < \lambda \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として定義すると，f' は κ から λ への上射となる．ところが $\lambda \in M$ により λ は基数だから，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは矛盾である．　(証明終わり)

選択公理の下で，次の補題は基数の定義から明らかである：

補題 2.35 (AC[35])　x, y を集合とするとき，

(1)　$|\,x\,| = |\,y\,|$ となるのは，全単射 $f : x \to y$ が存在する，ちょうどそのときである．

(2)　$x \neq \emptyset$ のとき，以下の (i)〜(iii) は同値である：

(i)　$|\,x\,| \leq |\,y\,|$;

(ii)　単射 $f : x \to y$ が存在する；

(iii)　上射 $g : y \to x$ が存在する．

補題 2.36　すべての基数 κ に対し，基数 μ で $\kappa < \mu$ となるものが存在する．とくに，$Card$ は真のクラスである．

証明　この補題も選択公理を用いる証明と，選択公理を仮定しない ZF での証明の両方を見ることにする．

選択公理を仮定したときには，補題の前半は次のように証明できる：x を $|\,x\,| = \kappa$ となる集合とする（たとえば $x = \kappa$ とすればよい）．補題 2.32 と補題 2.35 により，$\kappa = |\,x\,| < |\,\mathcal{P}(x)\,|$ となる．

これを選択公理を用いずに証明するには次のようにすればよい：α を κ と同じ濃度の順序数とするとき，κ 上の二項関係 R で，$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle$ となるものが存在する．さらに，モストフスキーの定理により，このような R に対し α は一意に決まる．したがって，置換公理により，

$$X = \{\alpha \in On : \text{ある } \kappa \text{ 上の二項関係 } R \text{ に対し } \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle\} \tag{2.42}$$

35)　ここで AC が仮定されているのは，AC を仮定しなかったときには，$|\,x\,|$ の定義されない集合が存在してしまうからである．

は集合となる．したがって 補題 2.20, (7) により $\mu = \bigcup X \in On$ となる．X の定義から，κ から μ への上射は存在しない[36]．さらに X の定義から μ はそのようなもののうち最小なものとなるから，$\mu \in Card$ となり，この μ が求めるようなものであることがわかる．

補題の後半の主張は，上で示したことと，補題 2.20, (7) によりよい．

(証明終わり)

補題 2.36 により，すべての基数に対し，κ の次の基数が

$$\kappa^+ = \min\{\mu \in Card : \kappa < \mu\} \tag{2.43}$$

として定義できる．補題 2.34 により，自然数における演算 $n \mapsto n+1$ は，ここで導入した $n \mapsto n^+$ と一致する．

次で定義される関数 $\aleph : On \to Card$ は[37]無限基数を小さい順に枚挙する．

$$\aleph(0) = \omega; \tag{2.44}$$

$$\aleph(\alpha+1) = (\aleph(\alpha))^+; \tag{2.45}$$

$$\aleph(\gamma) = \bigcup\{\aleph(\alpha) : \alpha < \gamma\} \qquad (\gamma \text{ が極限順序数のとき}). \tag{2.46}$$

補題 2.34, (3) により，すべての $\alpha \in On$ に対し，$\aleph(\alpha)$ は基数となる．通常は $\aleph(\alpha)$ のことを $\aleph_\alpha$ と書く．$\aleph_\alpha$ が順序数でもあることを強調したいときには，ω_α という書き方もすることにする．$\aleph_\alpha$ の列は真に増加的である．すべての無限基数 κ は $\aleph_\alpha$ という形をしていて，このような $\alpha \in On$ は一意に決まる： 一意性は， $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ が定義から真に増加的であることからよい．

無限基数で $\aleph_\alpha$ の形に表わせないものが存在するとすると，$Card \setminus (\{\aleph_\alpha : \alpha \in On\} \cup \omega)$．の最小元 μ がとれる．このとき，$\aleph_\alpha$, $\alpha \in On$ の定義から，すべての α に対し $\aleph_\alpha < \mu$ が成り立つことが帰納法によって示せるから，$\{\xi \in On : \xi < \mu\} \supseteq \{\aleph_\alpha : \alpha \in On\}$ は集合となってしまうが，このこ

36) もしそのようなものが存在するとすれば，κ から $\mu+1$ への上射も存在するから，$\mu+1 \in X$ となり，したがって $\mu \in \mu+1 \subseteq \mu$ となるが，これは，補題 2.20, (4) に矛盾である．

37) $\aleph$ （アレフ）はヘブライ語のアルファベットの最初の文字である．

とから，置換公理により，On も集合であることが結論できてしまい，補題 2.20, (7) に矛盾である．よって，

$$Card \setminus \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in On\}$$

である．

$|X| \leq \aleph_0$ となるような集合を可算集合とよぶ．$|X| = \aleph_0$ のとき，X が無限集合であることを強調したいときには，X は可算無限である，という言い方をすることもある．$|X| > \aleph_0$ のとき X は不可算である[38)]という．

α が後続順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ のとき，(つまり，$\alpha = \beta + 1$ となる β があり，$\kappa = (\aleph_\beta)^+$ となるとき）κ を後続基数とよぶ．また α が極限順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ となるとき，κ を極限基数とよぶ．

2.5　基数算術

κ と λ を基数とするとき，$\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$, κ^λ を次のように定義する．集合 A, B を $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ となるようにとる．ただし $A \cap B = \emptyset$ となるようにしておく[39)]．このとき，

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|, \quad \kappa \cdot \lambda = |A \times B|, \quad \kappa^\lambda = |{}^B A|$$

とする[40)]．これらの定義は A と B のとりかたに依存しない：つまり，$|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ なら，$|A \cup B| = |A' \cup B'|$（ただし，この場合には，と

38)　日本語の文献では,「非可算」という言い方の方が普通である.「不可算」という言い方は，愛媛大学の藤田博司氏の提唱による．

39)　たとえば，必要なら，A と B をそれぞれ $A \times \{0\}$ と $B \times \{1\}$ で置き換えればよい．

40)　A と B の整列順序が与えられたとき（$|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ の仮定から A 上にも B 上にも整列順序が存在する)，後出の補題 4.5 のようにして，ZF で $A \cup B$ と $A \times B$ 上の整列順序を構成することができる．したがって，$\kappa + \lambda$ や $\kappa \cdot \lambda$ は ZF で定義でき，次の補題 2.37, (1)〜(3), (7) も選択公理を用いずに ZF で証明できている．また，補題 2.40〜補題 2.41 と定理 2.42, (1) も選択公理なしに ZF で証明されていることは容易に確かめることができる．これに対して，${}^B A$ や $\bigcup A$ 上の整列順序，したがって，これらの集合の濃度の存在を示すためには，一般には選択公理が必要となる．

くに $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ となっているとする), $|A \times B| = |A' \times B'|$, $|{}^B A| = |{}^{B'}A'|$ の成り立つことが容易に示せる.

λ を基数とするとき, $f \in {}^\lambda 2$ に $f^{-1}{}''\{1\} \in \mathcal{P}(\lambda)$ を対応させる写像は全単射となる. したがって $|\mathcal{P}(\lambda)| = |{}^\lambda 2| = 2^\lambda$ となる.

次は上の定義からただちに導ける:

補題 2.37 κ, λ, μ を基数とする. このとき次が成り立つ:

(1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

(2) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

(3) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

(4) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

(5) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$

(6) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(7) $\kappa \leq \kappa', \lambda \leq \lambda'$; ($\kappa', \lambda'$ は基数), とするとき,

$$\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^\lambda \leq \kappa'^{\lambda'}$$

$On^2 = On \times On$ 上の半順序 $<$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \ \Leftrightarrow\ & \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \text{かつ}\ \alpha < \gamma) \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \text{かつ}\ \alpha = \gamma \ \text{かつ}\ \beta < \delta).\end{aligned}$$

次は $<$ の定義から容易に示せる:

補題 2.38 $<$ は On^2 上の線型順序である.

補題 2.39 すべての $\nu \in On$ に対し, $\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片で, $\nu \times \nu = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) < (0, \nu)\}$ となる.

証明 $\langle \alpha, \beta \rangle \in \nu \times \nu$ で $\langle \xi, \eta \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ とすると, $\max\{\xi, \eta\} \leq \max\{\alpha, \beta\} < \nu$ だから, $\langle \xi, \eta \rangle \in \nu \times \nu$ となる. したがって, $\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片である. $<$ の定義から, $\langle 0, \nu \rangle$ が $On^2 \setminus \nu \times \nu$ の最小元となることは明らかである. (証明終わり)

補題 2.40　$<$ は On^2 上の整列順序となる[41)].

証明　すべての $\langle\alpha,\beta\rangle \in On^2$ に対し，$\langle\alpha,\beta\rangle$ の定める On^2 の $<$ に関する始片が集合となっていることは補題 2.39 によりよい．

$X \subseteq On^2$ が空でないなら，X は $<$ に関する最小元を持つことを示す．まず，$\alpha_1 = \min\{\max\{\alpha,\beta\} : \langle\alpha,\beta\rangle \in X\}$ として $X_1 = \{\langle\alpha,\beta\rangle \in X : \max\{\alpha,\beta\} = \alpha_1\}$ とする．$\alpha_2 = \min\{\alpha :$ ある β に対し $\langle\alpha,\beta\rangle \in X_1\}$ として，$X_2 = \{\langle\alpha,\beta\rangle \in X_1 : \alpha = \alpha_2\}$ とする．さらに，$\alpha_3 = \min\{\beta : \langle\alpha_2,\beta\rangle \in X_2\}$ とする．このとき，$<$ の定義から，$\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle$ は X の最小元となる．　(証明終わり)

$(On^2, <)$ は整列順序だから，とくに外延的である．したがって，定理 2.29 のクラスへの拡張により，$(On^2, <)$ のモストフスキ崩壊が存在するが[42)]，それは推移的なクラスで $\in$ で整列されるから，On に他ならない．したがって，

$$K : (On^2, <) \to (On, \in)$$

となる順序同型 K が一意に存在することがわかる．補題 2.39 により，$K''\nu\times\nu$ は $(On, \in)$ の真の始片となり，したがって，On の元となる．

補題 2.41　(1)　すべての $n, m \in \omega$ に対し，$K(\langle m,n\rangle) < \omega$ となる．

(2)　すべての無限基数 κ に対し $K(\langle 0,\kappa\rangle) = \kappa$ となる．

(3)　すべての無限基数 κ に対し $\kappa\cdot\kappa = \kappa$ が成り立つ．

証明　(1): $k = \max\{m,n\} + 1$ とすると，$\langle m,n\rangle < \langle 0,k\rangle$ となる．補題 2.39 により，$\{\langle\alpha,\beta\rangle : \langle\alpha,\beta\rangle < \langle 0,k\rangle\} = k \times k$ となるから，$|\,k \times k\,| < \omega$ により，$K(\langle m,n\rangle) < K(\langle 0,k\rangle) < \omega$ である．

(2) と (3): $\kappa \in Card$, $\kappa \geq \aleph_0$ に関する帰納法により示す．$\kappa = \aleph_0$ のときには，補題 2.39 と (1) により $K(\langle 0,\omega\rangle) = \{K(\langle m,n\rangle) : m, n \in \omega\} = \omega$ となるから，(2) が成り立つことがわかる．したがって，$K \restriction \omega\times\omega$ は $\omega\times\omega$ から ω への全単射となる．よって $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ がわかる．

41)　つまり，$<$ は，(2.34) と (2.35) の意味で整順的な On^2 上の全順序である．
42)　補題 2.30 の後を参照

すべての基数 $\lambda<\kappa$ に対し，(2) と (3) が成り立つと仮定して，κ に対しても (2) と (3) が成り立つことを示す．$|\,\kappa\times\kappa\,|\geq\kappa$ だから，$K(\langle 0,\kappa\rangle)=K''\kappa\times\kappa\geq\kappa$ である．一方，帰納法の仮定から，すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|\,\alpha\times\alpha\,|=|\,\alpha\,|<\kappa$ となる．したがって，$K(\langle 0,\alpha\rangle)<\kappa$ である．$\langle 0,\kappa\rangle$ は $\langle 0,\alpha\rangle$, $\alpha<\kappa$ の極限となっているから，$K(\langle 0,\kappa\rangle)\leq\kappa$ がわかる．したがって，$\kappa\times\kappa=K(\langle 0,\kappa\rangle)=\kappa$ となり，$K\restriction\kappa\times\kappa$ は $\kappa\times\kappa$ から κ への全単射となることがわかるから，$\kappa\cdot\kappa=\kappa$ が帰結される． (証明終わり)

定理 2.42 (1) κ,λ を $\kappa\geq\omega$ または $\lambda\geq\omega$ となるような基数とする．このとき，$\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ となる．もし $\kappa,\lambda\neq 0$ なら，$\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である．

(2) κ, λ を無限基数とする．$|\,X\,|\leq\kappa$ で，すべての $x\in X$ に対して $|\,x\,|\leq\lambda$ となるとき，$|\bigcup X\,|\leq\max\{\kappa,\lambda\}$ が成り立つ．

証明 (1): κ か λ のどちらかが 0 のときは，定理の前半は明らかである．そこで $\kappa\neq 0,\lambda\neq 0$ とする．このとき $(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})$ から $\kappa\times\lambda$ への単射が容易に定義できるから，$\kappa+\lambda\leq\kappa\cdot\lambda$ となることがわかる．ところが，$\mu=\max\{\kappa,\lambda\}$ とすると，補題 2.41 により，

$$\mu\leq\kappa+\lambda\leq\kappa\cdot\lambda\leq\mu\cdot\mu=\mu$$

となるから定理の主張が実際に成り立つことがわかる．

(2): $X=\emptyset$ のときには，主張は明らかである．そうでないときには，$|\,X\,|\leq\kappa$ により，$X=\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$ と枚挙できる[43]．一般性を失うことなく．すべての x_α は空でない，としてよい．すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|\,x_\alpha\,|\leq\lambda$ により，$x_\alpha=\{a_{\alpha,\beta}:\beta<\lambda\}$ と枚挙できる．ここで $g:\kappa\times\lambda\to\bigcup X$ を $g(\langle\alpha,\beta\rangle)=a_{\alpha,\beta}$ により定義すると g は上射となるから，補題 2.35, (2) と (1) により $|\bigcup X\,|\leq\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である． (証明終わり)

系 2.43 κ, μ を $2\leq\mu\leq 2^\kappa$, $\omega\leq\kappa$ となるような基数とするとき，$\mu^\kappa=2^\kappa$ となる．とくに，$\kappa^\kappa=2^\kappa$ である．

43) 補題 2.35, (2) により κ から X への上射 f が存在するから，$x_\alpha=f(\alpha)$ とすればよい．

証明　$2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = |{}^{\kappa\times\kappa}2| = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$ によりよい．最後の等式は補題 2.41, (3) による．　　(証明終わり)

以上の結果により，無限基数の足し算とかけ算 $\kappa+\lambda$, $\kappa\cdot\lambda$ の構造は完全に解明されたと言えるが，基数の冪乗 κ^λ については，多くの問題が残されている．これについては，連続体仮説（2.7 節 を参照）のように，普通の集合論の範囲では決定できない問題も数多く存在する．

なお，基数算術に関しては，シェラハ (Saharon Shelah) による最近の研究により，多くの深い結果が得られている．シェラハ自身の [Shelah 1994] は，初学者向けとは言いがたいので，シェラハの基数算術を勉強するなら，この分野の入門書のひとつである [Holz et al 1999] から入るのがよいであろう．

2.6　共終数

$\alpha \in On$ として，$X \subseteq \alpha$ が α で共終とは，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\gamma \in X$ で $\beta \leq \gamma$ となるものが存在することである．α の共終数 $cf(\alpha)$ を，

$$cf(\alpha) = \min\{|X| : X \subseteq \alpha,\ X \text{ は } \alpha \text{ で共終 }\}$$

と定義する．

補題 2.44　すべての $\kappa \in Card$ に対し，$cf(\kappa^+) = \kappa^+$ となる．

証明　$X \subseteq \kappa^+$ が κ^+ で共終とすると，すべての $\beta \in X$ に対し，$|\beta| \leq \kappa$ となるから，もし $|X| \leq \kappa$ とすると，定理 2.42, (2) により，$\kappa^+ = |\kappa^+| = |\bigcup X| \leq \kappa \times \kappa = \kappa$ となり矛盾である．　　(証明終わり)

κ が，$cf(\kappa) = \kappa$ を満たすとき κ は基数となるが，このような κ を正則基数とよぶ．補題 2.44 により，非極限基数はすべて正則基数である．これに対し，正則な極限基数の存在は ZFC では証明できない（定理 4.11 を参照）．

たとえば，$cf(\aleph_\omega) = \omega$ である： $\{\aleph_n : n \in \omega\}$ が $\aleph_\omega$ で共終になるからである．とくに $\aleph_\omega$ は正則でない．

基数 κ が正則である，という条件は，次のように言いかえることもできる：

補題 2.45　基数 κ が正則であることと次は同値である：

(2.47)　$\lambda < \kappa$ で，各 $\alpha < \lambda$ に対し，$|X_\alpha| < \kappa$ とするとき，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| < \kappa$ となる．

証明　X_α, $\alpha < \lambda$ を (2.47) のようなものとする．もし，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = \kappa$ だったとすると，$X = \{|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| : \alpha < \lambda\}$ は $\kappa = |\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha|$ で共終となるが，$|X| \leq \lambda < \kappa$ だから，κ は正則でない．

逆に κ が正則でなければ，κ で共終な $X \subseteq \kappa$ で $|X| < \kappa$ となるものがあるが，$|X| = \lambda$ として，$f : \lambda \to X$ を上射とし，$\alpha < \lambda$ に対し，$X_\alpha = f(\alpha)$ とすれば，X_α, $\alpha < \lambda$ は (2.47) の反例となる．　(証明終わり)

次の定理はカントルの定理（補題 2.32 の後半）の拡張となっている：

定理 2.46 (ケゥニッヒの定理)　κ を任意の無限基数とするとき，$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ が成り立つ．

証明　$\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{cf(\kappa)}\kappa$ とするとき，つねに $f \in {}^{cf(\kappa)}\kappa \setminus \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ がとれることを示せばよい．

$\{\alpha_\xi : \xi < cf(\kappa)\} \subseteq \kappa$ を κ で共終とする．このとき，$f : cf(\kappa) \to \kappa$ を，

$$f(\xi) = \min(\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\})$$

で定義する．$|\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\}| < \kappa$ だから，$\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\} \neq \emptyset$ となり，この定義は可能である．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f \neq f_\alpha$ である：$\alpha < \alpha_\xi$ となる $\xi < cf(\kappa)$ がとれるが，f の定義から $f(\xi) \neq f_\alpha(\xi)$ となるからである．したがって証明が完了した．　(証明終わり)

定理 2.47　すべての無限基数 κ に対し，$cf(2^\kappa) > \kappa$ が成り立つ．

証明　$cf(2^\kappa) \leq \kappa$ だったとすると，定理 2.46 により，

$$2^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = (2^\kappa)^\kappa \geq (2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa$$

となり矛盾である．　(証明終わり)

2.7　連続体仮説

補題 2.32 により $\kappa < 2^\kappa$ となる．とくに $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ であるが，1.1 でも述べたことからもわかるように $\mathbb{R}$ と ${}^\omega 2$ とはほとんど位相同型になり，とくに濃度に関しては $|\,\mathbb{R}\,| = |\,{}^\omega 2\,| = 2^{\aleph_0}$ となることがわかる．連続体仮説（Continuum Hypothesis — 以下 CH と略）は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という主張である[44]．後述の定理 4.9 と定理 4.19 により，連続体仮説は集合論の公理系から独立である — つまり ZFC から証明できないし，その否定も証明できない．ちなみに，集合論の専門家の間では，連続体仮説の否定の方が正しいと考えられることが多い[45]．ゲーデルは晩年に $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ を導く公理を提案している（[Gödel 1970], [竹内 1998] の付録も参照）．連続体の構造に関しては，“実数の集合論” と呼ばれる 1980 年代以降に活発に研究されている研究分野での多くの結果の蓄積がある[46]．[Brendle et al 200?] はそのような結果をふまえた，ゲーデルの公理に関する現代の視点からの再論となっている．

連続体仮説をすべての無限基数に対して一般化した，

$$(\forall \kappa \in Card)(2^\kappa = \kappa^+)$$

は一般連続体仮説とよばれ，GCH と略される．

$|\,\mathbb{R}\,| = 2^{\aleph_0}$ だから，連続体仮説は $\mathbb{R}$ を $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙できる，という主張と同値である．このことを使うと連続体仮説の次のような特徴付けを証明することができる．

定理 2.48 ([Sierpiński 1934])　次の命題は ZFC 上で連続体仮説 (CH) と同値である：

実平面 $\mathbb{R}^2$ の分割 $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ で，

(i) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ は可算となり，

44)　本節では AC を常に仮定する．
45)　このあたりの事情については，[渕野 2000] や [渕野 2004] の解説も参照されたい．
46)　実数の集合論については，たとえば [Bartoszyński and Judah 1995] を参照されたい．

(ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し $B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ は可算となる

ようなものが存在する．

証明 CH が成り立つとして，$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とする．このとき，$A = \{\langle x_\alpha, x_\beta \rangle : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha > \beta\}$, $B = \{\langle x_\alpha, x_\beta \rangle : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \leq \beta\}$ とすれば，$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ となるが，A, B は定理の (i), (ii) を満たす: $x \in \mathbb{R}$ とすると，$x = x_{\alpha^*}$ となる $\alpha^* < \omega_1$ がとれるが，このとき $A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \{\langle x_{\alpha^*}, x_\beta \rangle : \beta < \alpha^*\}$ となるから，$|\, A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) \,| \leq |\, \alpha^* \,| \leq \aleph_0$ となる．同様にして $|\, B \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \,| \leq \aleph_0$ も示せる．

次に CH が成立たないと仮定する．$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ として，A が (i) を満たすとする．$r_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \omega_1$ を互いに異なるものとして，

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ある } \alpha < \omega_1 \text{ に対し } \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \\ &= \textstyle\bigcup_{\alpha < \omega_1} \{x \in \mathbb{R} : \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \end{aligned}$$

とすると，C の濃度は，高々 $\aleph_1$ である．したがって，$\neg CH$ の仮定により $\mathbb{R} \setminus C$ は空でない．$y^* \in \mathbb{R} \setminus C$ をとると，$\{\langle x_\alpha, y^* \rangle : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A = B$ となるから $(\mathbb{R} \times \{y^*\}) \cap B$ は不可算となり，(ii) を満たさない．

(証明終わり)

次の定理は上の定理の興味深い応用の１つである．

定理 2.49 ([Sierpiński 1920]) 連続体仮説 (CH) を仮定する．このとき，関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ で，積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ および $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ は存在するが，それらの値が等しくならないようなものがとれる．

証明 $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を定理 2.48 でのようにとり，f を B の特性関数とする．$y \in [0,1]$ に対し，$\{x \in [0,1] : f(x,y) \neq 0\} = B \cap ([0,1] \times \{y\})$ は高々可算である．したがって，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 0\,dy = 0.$$

となる．同様に，各 $x \in [0,1]$ に対し，$\{y \in [0,1] : f(x,y) \neq 1\} = A \cap (\{x\} \times [0,1])$ は高々可算だから，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

となる．よって，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ である．

(証明終わり)

Tonelli の定理により，f が可測なら，$\int_0^1 \int_0^1 f\,dxdy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f\,dydx$ は両方とも存在する場合には等しくなる．上の定理は，CH のもとでは，Tonelli の定理での f の可測性の条件が落とせないことを示している．定理 2.49 の命題は，連続体仮説の否定 ¬CH の下ではその真偽は決まらないことが知られている：

定理 2.50 (Laczkovich, Friedman, Freiling[47]) 次の命題は ZFC と矛盾しない：

> すべての関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ に対し，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ が存在するときにはこれらが等しくなる．

一方，定理 2.49 の命題が連続体仮説の否定のもとで成立するような状況は簡単に作りだすことができる．定理 2.49 の証明は，

1. $\mathbb{R}$ の分割 $\mathbb{R} = A \cup B$ で,
   (i) すべての $s \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})\,| < 2^{\aleph_0}$ となり,
   (ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})\,| < 2^{\aleph_0}$ となる
   ようなものが存在する．
2. 濃度 $2^{\aleph_0}$ 末満の $\mathbb{R}$ の部分集合は，すべて零集合である．

が成り立てば，同様に行うことができる．ここで，1. は ZFC で証明できる命題である: $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ と枚挙して 定理 2.48 と同様に証明すればよい．2. は "実数の集合論" での用語で言えば，$non(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$ ということであるが，これは，例えば，マーティンの公理のもとで成立する[48]．

47) 出典については [Ciesielski 1997] の文献表を参照.

48) マーティンの公理は CH を弱めた命題で，ZFC + $\neg CH$ と矛盾しないことが知られている．この公理については，[Jech 1978/2003], [Kunen 1980] などを参照されたい．なお，[渕野 2004] には，マーティンの公理の集合論的な意味付けの議論についての解説がある．

連続体仮説の特徴付けは，定理 2.48 以外にも色々と知られている．ここでは，解析学的な言葉による特徴付け (定理 2.51) と，線型代数の言葉による特徴付け（定理 2.52）を 1 つづつ見てみることにする．筆者は次の定理を [Aigner and Ziegler 1998] で学んだ．

定理 2.51 ([Erdős 1964])　連続体仮説 (CH) は ZFC 上で次の命題と同値である：

(2.48)　解析関数の不可算な族 $\mathcal{F}$ で，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在する．

証明　まず，CH の否定を仮定する．$\mathcal{F}$ を解析関数の不可算族とするとき，$z \in \mathbb{C}$ で $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が不可算になるようなものが必ず存在することを示す．f_α, $\alpha < \omega_1$ を $\mathcal{F}$ の互いに異なる元とする．$\alpha, \beta \in \omega_1$, $\alpha \neq \beta$ に対し，$S_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$ とすれば，f_α, f_β は異なる解析関数なので，一致の定理から，$S_{\alpha,\beta}$ は可算となる．したがって，仮定から，$S = \mathbb{C} \setminus \bigcup\{S_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \neq \beta\}$ とすれば $S \neq \emptyset$ となる．$z^* \in S$ とすれば，$f_\alpha(z^*)$, $\alpha < \omega_1$ は互いに異なるから，$\{f(z^*) : f \in \mathcal{F}\}$ は不可算になることがわかる．

次に，CH を仮定して，解析関数の不可算な族 $\mathcal{F}$ で，どの $z \in \mathbb{C}$ に対しても $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在することを示す．$\mathbb{C} = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ として，解析関数の列 f_α, $\alpha < \omega_1$ を次を満たすように構成する：

(2.49)　すべての $\beta < \alpha$ に対し，$f_\alpha \neq f_\beta$ で，$f_\alpha(v_\beta)$ は（複素）有理数．

これが可能であることは次のようにしてわかる：f_β, $\beta < \alpha$ が構成されたとき，$\{v_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{w_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおし，$\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{g_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおす．これは $\alpha < \omega_1$ により可能である．複素数列 $\varepsilon_n > 0, n \in \omega$ を，

(2.50)　$f_\alpha(z) = \varepsilon_0(z-w_0)+\varepsilon_1(z-w_0)(z-w_1)+\varepsilon_2(z-w_0)(z-w_1)(z-w_2)+\cdots$

としたときに，$f_\alpha(z)$ がすべての z でうまく定義されるように帰納的にとる．さらにこの帰納的な構成での各 n ステップで，ε_n の値を $f_\alpha(w_{n+1}) \neq g_n(w_{n+1})$ となるように調節できる．このとき，(2.50) のように定義される f_α は (2.49) を満たす．$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とすれば，$\mathcal{F}$ は求めるようなものとなっている．(証明終わり)

K を体として，J を K の部分体とするとき，K は J 上の線型空間と見られることに注意する．とくに，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の線型空間と見ることができる．このことを用いて，CH を次のように特徴付けることができる：

定理 2.52 (エルデス=角谷の定理)　連続体仮説 (CH) は ZFC 上で次の命題と同値である：

(2.51)　$\mathbb{R}$ の部分集合 X_n, $n \in \omega$ で，各 X_n は $\mathbb{Q}$ 上線型独立で $\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n$ となるものが存在する．

選択公理の下では，線型空間の基底の存在定理が成り立つので，上のような X_n は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底に拡張することができる．$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底はハメル基底と呼ばれる．したがって，(2.51) は，"$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は可算個のハメル基底で覆うことができる" と言い替えることができる．

定理 2.52 の証明には，次の準備が必要となる．κ を正則基数として，$C \subseteq \kappa$ が閉非有界とは，

(2.52)　すべての極限順序数 $\alpha < \kappa$ に対し $C \cap \alpha$ が α で共終なら，$\alpha \in C$ となり，

(2.53)　すべての $\alpha < \kappa$ に対し $C \setminus \alpha \neq \emptyset$（つまり C は κ で共終）である

こととする[49]．C は κ で閉非有界である，あるいは，C は κ の閉非有界な部分集合であるとも言う[50]．

49)　(2.52) が成り立つとき，C は閉じているという．また (2.53) が成り立つとき，C は κ で非有界であるという．

50)　これは「C は κ の club 部分集合である」，と表現されることもある．ここでの "club" は <u>cl</u>osed <u>u</u>n<u>b</u>ounded からの造語である．

S を κ の部分集合とする．すべての κ で閉非有界な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となるとき，S は κ で定常であるという．S は κ の定常な部分集合である，という言い方をすることもある．

補題 2.53　κ を正則基数で $\kappa > \omega$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1)　$C, C' \subseteq \kappa$ が閉非有界なら，$C \cap C'$ も閉非有界である．

(2)　$S \subseteq \kappa$ は閉非有界なら定常である．

(3)　$S \subseteq \kappa$ が定常なら $|S| = \kappa$ である．

(4)　$\lambda < \kappa$ で，各 $\xi < \lambda$ に対し C_ξ が κ の閉非有界な部分集合なら，$\bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ も κ で閉非有界である．

証明　(1): $C \cap C'$ が (2.52) と (2.53) を満たすことを示せばよい．

(2.52) の証明: $\alpha < \kappa$ が極限順序数で，$\alpha \cap (C \cap C')$ は α で共終とすると，$\alpha \cap C$ も α で共終だから，C が閉非有界により，$\alpha \in C$ となる．同様に $\alpha \in C'$ となるから，$\alpha \in C \cap C'$ である．

(2.53) の証明: $\alpha < \kappa$ を任意にとるとき，順序数の上昇列 $\alpha_n, n \in \omega$ を次のように定義する：

(2.54)　$\alpha_0 = \alpha;$

(2.55)　$\alpha_{2n+1} = \min(C \setminus (\alpha_{2n} + 1));$

(2.56)　$\alpha_{2n+2} = \min(C' \setminus (\alpha_{2n+1} + 1)).$

(2.55) と (2.56) は C と C' が閉非有界であることから可能である．このとき，$\beta = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ とすれば，κ は正則な非可算基数だから，$\beta < \kappa$ で，(2.54) により $\alpha < \beta$ である．(2.55) と (2.56) により，$C \cap \beta$ と $C' \cap \beta$ はともに β で共終となるから，$\beta \in C \cap C'$ がわかる．

(2) は (1) と定常の定義から明らかである．

(3): 任意の $\alpha < \kappa$ に対して $C = \kappa \setminus \alpha$ は κ で閉非有界だから，$S \cap C \neq \emptyset$ により S は α より大きな元を含むことがわかる．したがって，S は κ で共終である．κ は正則だから，$|S| = \kappa$ である．

(4): 基数 $\lambda < \kappa$ に関する帰納法で示す．λ が有限のときには，(1) によりよい．$\lambda < \kappa$ より小さい基数について (4) の命題がすでに示されたと仮定する．$\xi < \lambda$ に対し C_ξ が κ で閉非有界とするとき，$C = \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ が閉非有界となることを示す．このためには C が (2.52) と (2.53) を満たすことを示せばよい．

(2.52) の証明: 極限順序数 $\alpha < \kappa$ に対し，$\alpha \cap C$ が α で共終とすると，すべての $\xi < \lambda$ に対し，$\alpha \cap C_\xi$ も α で共終だから，C_ξ が閉非有界により，$\alpha \in C_\xi$ である．したがって，$\alpha \in \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi = C$ である．

(2.53) の証明: 任意の $\alpha < \kappa$ に対し，κ の元の上昇列 $\alpha_\xi, \xi < \lambda$ を次のように定義する：

(2.57)　$\alpha_0 = \alpha$;

(2.58)　$\alpha_{\xi+1} = \min\left(\left(\bigcap_{\eta\leq\xi} C_\eta\right) \setminus (\alpha_\xi + 1)\right)$;

(2.59)　$\gamma < \lambda$ が極限順序数のときには，$\alpha_\gamma = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\}$.

(2.58) での $\bigcap_{\eta<\xi} C_\eta$ は帰納法の仮定から閉非有界である．また κ は正則基数だから，(2.59) で，$\sup\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\} < \kappa$ となる．したがって上の構成は可能であることがわかる．$\beta = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$ とすると，κ が正則基数であることから，$\beta < \kappa$ である．また (2.57) により $\alpha < \beta$ である．(2.58) により，すべての $\xi < \lambda$ に対し，$\beta \cap C_\xi$ は β で共終となるから，$\beta \in C_\xi$ である．したがって $\beta \in C$ である．　(証明終わり)

次の定理の命題はフォドアの補題と呼ばれる．無限組合せ論の議論で非常に頻繁に用いられる定理である．

定理 2.54 (フォドアの補題)　κ を不可算な正則基数として，$S \subseteq \kappa$ を定常とする．$f : S \to \kappa$ が，

(2.60)　すべての $\alpha \in S$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$

を満たすとき[51)]，κ で定常な $S' \subseteq S$ と $\beta_0 \in \kappa$ で，すべての $\alpha \in S'$ に対し $f(\alpha) = \beta_0$ となるものが存在する．

51)　(2.60) を満たすような f は退行的であるという．

証明 各 $\beta \in \kappa$ に対し，$X_\beta = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta\}$ とする．$\beta \in \kappa$ で X_β が定常となるものがあれば，β_0 をこのような β として $S' = X_{\beta_0}$ とすればよい．そのようなものが存在しないとすると，すべての $\beta < \kappa$ に対し，κ で閉非有界な C_β で $X_\beta \cap C_\beta = \emptyset$ となるようなものがとれる．ここで，

$$C = \{\alpha \in \kappa : (\forall \beta < \alpha)(\alpha \in C_\beta)\}$$

とすると，

Claim 2.54.1 C は κ で閉非有界である．

$\vdash$ C に対し，(2.52) と (2.53) が成り立つことを示せばよい．

(2.52) の証明: $\alpha < \kappa$ が極限順序数で，$C \cap \alpha$ が α で共終なら，任意の $\beta < \alpha$ に対し $\beta < \beta' < \alpha$ とすると，$\beta' < \alpha' < \alpha$ で $\alpha' \in C$ となるものがとれる．C の定義から，$\alpha' \in C_\beta$ である．このことから，$C_\beta \cap \alpha$ は α で共終となることがわかるから，$C_\beta \cap \alpha$ が閉非有界であることから $\alpha \in C_\beta$ である．$\beta < \alpha$ は任意だったから，C の定義から，$\alpha \in C$ である．

(2.53) の証明: 任意の $\alpha < \kappa$ に対し，κ の元の上昇列 α_n, $n \in \omega$ を，帰納的に

(2.61) $\alpha_0 = \alpha$;

(2.62) $\alpha_{n+1} = \min\left(\bigcap_{\beta < \alpha_n} C_\beta \setminus \alpha_n + 1\right)$.

として定義する．補題 2.53, (4) により，(2.62) での $\bigcap_{\beta < \alpha_n} C_\beta$ は閉非有界となるので，この定義は可能である．$\alpha^* = \sup_{n<\omega} \alpha_n$ とする．(2.61) により $\alpha < \alpha^*$ である．一方 κ は正則で $\kappa > \omega$ だから，$\alpha^* < \kappa$ である．$\beta < \alpha^*$ なら，$n_0 < \omega$ を十分に大きくとると，すべての $n_0 < n < \omega$ に対し，$\beta < \alpha_{n-1}$ となるから，(2.62) により，$\alpha_n \in C_\beta$ である．したがって $C_\beta \cap \alpha^*$ は α^* で共終となるから，C_β が閉非有界により，$\alpha^* \in C_\beta$ である．$\beta < \alpha^*$ は任意だったから，C の定義により $\alpha^* \in C$ である． $\dashv$

ここで S は定常だから，$\alpha_0 \in S \cap C$ がとれるが，$\alpha_0 \in C$ によりすべての $\beta < \alpha_0$ に対し，$\alpha_0 \notin X_\beta$ つまり $f(\alpha_0) \neq \beta$ となる．ところが (2.60) によ

り $f(\alpha_0) < \alpha_0$ だから，これは矛盾である．　(証明終わり)

次の補題の証明は，フォドアの補題（定理 2.54）の典型的な応用例の１つとなっている：

補題 2.55　κ を無限基数とするとき，任意の関数 $f : \kappa^{++} \times \kappa^{+} \to \kappa$ に対し，$\eta < \xi < \kappa^{+}$ と定常な $K \subseteq \kappa^{++}$ で，すべての $\alpha, \beta \in K$ に対し $f(\alpha, \eta) = f(\beta, \xi)$ となるものが存在する[52]．

証明　$f : \kappa^{++} \times \kappa^{+} \to \kappa$ とする．各 $\alpha \in \kappa^{++}$ に対し，$\nu_\alpha \in \kappa$ を

(2.63)　$\{\eta < \kappa^{+} : f(\alpha, \eta) = \nu_\alpha\}$ は κ^{+} で共終

となるようにとる[53]．

このとき，フォドアの補題（定理 2.54）により，定常な $K_1 \subseteq \kappa^{++}$ と $\nu^* < \kappa$ で，すべての $\alpha \in K_1$ に対し $\nu_\alpha = \nu^*$ となるようなものがとれる[54]．

各 $\alpha \in K_1$ に対し，$\eta_\alpha < \kappa^{+}$ を $f(\alpha, \eta_\alpha) = \nu^*$ となるようにとる．ふたたびフォドアの補題により，定常な $K_2 \subseteq K_1$ と $\eta < \kappa^{+}$ で，すべての $\alpha \in K_2$ に対して $\eta_\alpha = \eta$ となるようなものがとれる．

ここで (2.63) により，各 $\alpha \in K_2$ に対し，$\xi_\alpha \in \kappa^{+} \setminus \eta{+}1$ で $f(\alpha, \xi_\alpha) = \nu^*$ となるものがとれる．再度フォドアの補題を用いると，定常な $K \subseteq K_2$ と $\xi < \kappa^{+}$ で，すべての $\alpha \in K$ に対し $\xi_\alpha = \xi$ となるものがとれる．ξ_α, $\alpha \in K_2$ と K のとり方から，$\eta < \xi < \kappa^{+}$ で，すべての $\alpha, \beta \in K$ に対し $f(\alpha, \eta) = f(\beta, \xi) = \nu^*$ となることがわかる．したがって，これらの η, ξ, K が求めるようなものである．　(証明終わり)

以上の準備により，定理 2.52 の証明が行なえる．

定理 2.52 の証明　まず CH が成立たない，つまり $|\mathbb{R}| \geq \aleph_2$ と仮定する．このとき，もし (2.51) が成立つとすると，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の部分空間 S と $\mathbb{Q}$ 上線

52)　κ^{+} は (2.43) で定義した κ の次の基数で，κ^{++} は，この記法での $(\kappa^{+})^{+}$, つまり κ の次の次の基数のことである．

53)　$\{\eta < \kappa^{+} : f(\alpha, \eta) = \nu\}$, $\nu < \kappa$ は κ^{+} の κ 個の部分集合への分割だから，その中の少なくとも 1 つは濃度 κ^{+} となり，したがって，κ^{+} で共終となる．

54)　$\kappa^{++} \setminus \kappa \ni \alpha \mapsto \nu_\alpha \in \kappa \subseteq \kappa^{++}$ は退行的となることに注意する．

形独立な S の部分集合 $X_n,\ n \in \omega \setminus \{0\}$ で，$|\,S\,| = \aleph_2$ かつ $S = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ となるようなものがとれる．ただし，$X_0 = \{0\}$ とする．

$h : S \to \omega$ を，すべての $x \in S$ に対し，$x \in X_{h(x)}$ となるようにとる．S'' を S の $\mathbb{Q}$ 上の線型部分空間で $|\,S''\,| = \aleph_1$ となるものとして，$S = S' \oplus S''$ と直和分解する．このとき $|\,S'\,| = \aleph_2$ である．

$f : S' \times S'' \to \omega$ を $f(a,b) = h(a+b)$ となるものとする．このとき，補題 2.55 により，$a,\ b \in S' \setminus \{0\}$, $a \neq b$ と $c,\ d \in S''$, $c \neq d$ で $f(a,c) = f(b,d) = f(a,d) = f(b,c)$ となるものがとれる．$f(a,c) = n$ とすると $a+c,\ b+d,\ a+d,\ b+c$ はすべて X_n の元である．$a,\ b,\ c,\ d$ の選び方から $a+c,\ b+d,\ a+d,\ b+c$ はすべて異なる．とくにこのことから $n \neq 0$ である．ところが,

$$(a+c)+(b+d)-(a+d)-(b+c) = 0.$$

だから，これは X_n の元が互いに線形独立であることに矛盾である．

次に，CH が成り立つと仮定する．このときには，$|\,\mathbb{R}\,| = \aleph_1$ だから，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底 B をとると $|\,B\,| = \aleph_1$ である．$B = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙する．ただし $x_\alpha,\ \alpha < \omega_1$ は互いに異なるものとする．各 $\beta < \omega_1$ に対し，S_β を $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ から生成される $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の線型部分空間とする．このとき $S_0 = \{0\}$ で，すべての $\beta < \omega_1$ に対し S_β は可算となり，$\langle S_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ は真の上昇列となることに注意する．$X_\beta = S_{\beta+1} \setminus S_\beta$ とすると，X_β は空でない可算集合になる．したがって，各 X_β を $X_\beta = \{x_{\beta,n} : n < \omega\}$ と枚挙できる．ここで，$n < \omega$ に対し，$Y_n = \{x_{\beta,n} : \beta < \omega_1\}$ とすると，$\mathbb{R} = \bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{0\}$ である．さらに，各 Y_n は線形独立である：$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し，$o(a)$ を $\beta < \omega_1$ で $a \in X_\beta$ となるようなものとする[55)]．$n < \omega$ で，Y_n が線形独立でないものがあったとする．このときには，$\ell \in \omega \setminus 1$, $q_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ と $z_k \in Y_n,\ k < \ell$ で $\sum_{k<\ell} q_k z_k = 0$ となるものがとれる．Y_n の定義から，$o(z_0) > o(z_1), \ldots, o(z_{\ell-1})$ となっているとしてよい．このとき，

55)　X_β の定義から，$X_\beta,\ \beta < \omega_1$ は互いに素で，$\bigcup_{\beta<\omega_1} X_\beta = \mathbb{R} - \{0\}$ だから，このようなものは一意に存在する．

$$z_0 = -\frac{1}{q_0}\left(\sum_{k\in\ell\setminus\{0\}} q_k z_k\right)$$

となるが

$$o(z_0) > o\left(-\frac{1}{q_0}\left(\sum_{k\in\ell\setminus\{0\}} q_k z_k\right)\right)$$

だから，これは矛盾である． (証明終わり)

第3章

集合論のモデル

本章と次章で集合論の公理や命題の，相対的無矛盾性，独立性の証明法の初歩を概説する．ここでのハイライトは次章で述べることになる，ゲーデルによる一般連続体仮説の ZF 上の相対無矛盾性の証明と，コーエンの強制法による ZF 上の連続体仮説の否定の相対無矛盾性の証明のスケッチである．

本章では，おもに次章の準備として必要となることがらについて述べ，ゲーデルやコーエンの手法を用いずに遂行できる，いくつかの簡単な相対的無矛盾性証明をみる．本章の終りで，ゲーデルの不完全性定理の応用である，理論の無矛盾性の強さ，という概念を導入するが，これは本書第 II 部で中心的な役割をはたすことになる主要概念の一つである．

3.1 論理式の相対化と絶対性

M をクラスとするとき，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ に対し，φ の M への相対化を，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ^M として次のように帰納的に定義する：

(3.1) φ が $x = y$ あるいは $x \in y$ の形をしているときには，φ^M は φ 自身とする；

(3.2) φ が $\psi \wedge \eta$ または，$\psi \vee \eta$ または，$\neg\psi$ の形をしているときには，φ^M は，それぞれ，$\psi^M \wedge \eta^M$ または，$\psi^M \vee \eta^M$ または，$\neg\psi^M$ と

する；

(3.3) φ が，$\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ の形をしているときには，φ^M は，それぞれ，$(\exists x \in M)\psi^M$ または，$(\forall x \in M)\psi^M$ とする[1]．

φ^M を $M \models \varphi$ とも書き "φ は M で成り立つ" あるいは，"M は φ を満たす，とも読み下すことにする．M が集合のときには，$\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ として，$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$M \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ はモデル理論の意味での $\langle M, \in\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ と一致する．ただし，後で述べる，モデル理論の意味での "$\models$" の集合論における扱いとは異なり，ここでの φ は集合論の外側の "本物の" 論理式になっていることに注意する．

$M \models \varphi$ のとき，M は φ のモデルである，とも言うことにする．また $\mathcal{L}_\in$ の公理系 T のすべての公理 φ に対して $M \models \varphi$ が成り立つとき，これを $M \models T$ と表わすことにする[2]．公理系 T が矛盾するとは，T からある命題 φ とその否定 $\neg\varphi$ の両方が導けることである．T が矛盾すれば，T からはすべての命題が証明できることになる．T が矛盾しないとき，T は無矛盾であるという．

以下の定理とその証明では，T や ψ は，T（の記述する集合論）の中で "存在" する対象ではなく，"本物" の公理系や論理式であり，したがって，この定理と証明は，そのようなものの一つ一つ（とクラス一つ一つ）に対し成立する命題とその証明のパターンを述べたものとなっている[3]．

次の性質は，以降の議論では断わりなくいたるところで用いられる：

補題 3.1 $M \models T$ で $T \vdash \varphi$ なら，$M \models \varphi$ となる．とくに，$M \models \varphi$ で $\vdash \varphi \to \psi$ なら，$M \models \psi$ である．

---

1) M が $\varphi(x, \ldots)$ の定めるクラスのとき，p.20 の脚注でと同様に，$(\exists x \in M)\psi^M$ は $\exists x(\varphi(x, \ldots) \land \psi^M)$ のこととする．また，$(\forall x \in M)\psi^M$ は $\forall x(\varphi(x, \ldots) \to \psi^M)$ のこととする．

2) 厳密に言うと，"議論が集合論 T_0 で展開されていて，$T_0 \vdash M \models \varphi$ がすべての T の公理 φ で成り立つとき，…" のように言わなくてはならないが，T_0 が何か文脈から明らかな場合や，そこでの議論が T_0 が何であるかに依存しない場合には，あえて明示しないことにする．

3) このような状況を，たとえば "定理 3.2 は超数学における定理である" などと表現することもある．

証明　$M \models T$ で $T \vdash \varphi$ とする．$T \vdash \varphi$ により，T の公理 $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ で $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1} \vdash \varphi$ となるものがとれる．つまり，$\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ からの φ の証明が存在するが，この証明にあらわれるすべての論理式 ψ を ψ^M で置き換え，（証明の体系に依存する）多少の変更を加えることで，$\varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n-1}^M$ からの φ^M の証明が得られる．よって $\varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n-1}^M \vdash \varphi^M$ である．一方，仮定により $\varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n_1}^M$（がここでベースとしている理論から証明きる）から，φ^M つまり $M \models \varphi$（がここでベースとしている理論から証明できること）がわかる．　(証明終わり)

定理 3.2　T を $\mathcal{L}_\in$ の公理系として，ψ を $\mathcal{L}_\in$ の文とする．クラス M で，T に含まれる各公理 φ に対し，$T \vdash \varphi^M$ が証明でき，かつ $T \vdash \psi^M$ となるものがあるとする．このとき，T が無矛盾なら，$T+\psi$（T の公理全体に ψ を新しい公理として付加して得らえる体系）も無矛盾である．

証明　$T+\psi$ が矛盾するとすると，$T+\psi \vdash \neg\psi$ となる．したがって，T の公理 $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ で，$\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1},\psi \vdash \neg\psi$ となるものがとれる．このとき，$\neg\psi$ の $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1},\psi$ からの証明に現われる論理式のすべてを M で相対化して，多少の補正をすることで，$\neg\psi^M$ の $\varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n-1}^M,\psi^M$ からの証明が得られる．したがって，

$$\varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n-1}^M,\psi^M \vdash \neg\psi^M$$

である．一方，仮定から，$T \vdash \varphi_0^M,\ldots,\varphi_{n-1}^M,\psi^M$ だから，$T \vdash \neg\psi^M$ となるが，$T \vdash \psi^M$ により，これは T が無矛盾であるという仮定に矛盾する．(証明終わり)

T の無矛盾性を仮定すると，$T+\psi$ も無矛盾であることが示せるとき，ψ は T 上相対的無矛盾であるという．ψ も $\neg\psi$ も T 上相対的無矛盾のとき，ψ は T 上独立であるという．

以下では，定理 3.2 での T としては，主に ZFC または，その拡張，または ZFC のいくつかの部分公理系が考察されることになる．ZFC の部分公理系として考察されるものは，ZF, ZF（または ZFC）から置換公理を除いたもの — これを Z（または ZC）とあらわす，ZF（または ZFC etc.）から

基礎の公理を除いたもの — これを ZF$^-$（または ZFC$^-$ etc.）とあらわす，さらに，ZFC（または，ZFC$^-$ etc.）からべき集合の公理を除いたもの — これを ZFC − P（または，ZFC$^-$ − P etc.）とあらわす — などである．

T を上のようなものとして M を（T での）クラスとする．$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ は，すべての $a_0,\ldots,a_{n-1}\in M$ に対し，

$$\varphi(a_0,\ldots,a_{n-1}) \leftrightarrow \varphi^M(a_0,\ldots,a_{n-1})$$

となることが（T で）示せるとき,（T で M 上で）絶対的であるという．

$\mathcal{L}_\in$-論理式のうち Δ_0-論理式とよばれるものを次のようにして帰納的に定義する：

(3.4) x, y が変数なら，表現 $x=y$, $x\in y$ は Δ_0-論理式である（以下では簡単のために“集合論の”は略す）；

(3.5) φ, ψ が Δ_0-論理式なら，$(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$, $\neg\varphi$ も Δ_0-論理式である；

(3.6) φ が Δ_0-論理式で x, y が変数なら $(\exists x\in y)\varphi$, $(\forall x\in y)\varphi$ は Δ_0-論理式である[4]；

(3.7) Δ_0-論理式は (3.4), (3.5), (3.6) の繰返し適用により得られるもののみである．

Δ_0-論理式 φ の前に（束縛されていない）存在量化子をいくつかつけた $\exists x_0\cdots\exists x_{k-1}\varphi$ の形の論理式を Σ_1-論理式とよぶ．また，Δ_0-論理式 φ の前に（束縛されていない）全称量化子をいくつかつけた $\forall x_0\cdots\forall x_{k-1}\varphi$ の形の論理式を Π_1-論理式とよぶ．

$\mathcal{L}_\in$-論理式 φ がある Δ_0（または Σ_1 または Π_1）-論理式 φ' と論理的に同値となることが示せるとき，つまり，$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$ が成り立つとき，φ は Δ_0（または Σ_1 または Π_1）であると言うことにする．φ が Σ_1 でも Π_1 でもあるとき，φ は Δ_1 であるという．

4) $(\exists x\in y)\varphi$ と $(\forall x\in y)\varphi$ はそれぞれ，$\exists x(x\in y\wedge\varphi)$ と $\forall x(x\in y\rightarrow\varphi)$ の略である．$\exists x\in y$, $\forall x\in y$ の形の量化子は束縛された量化子とよばれる．

さらに，考察している公理系 T のもとで，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ に対し Δ_0（または Σ_1 または Π_1）-論理式 φ' で

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

となるものがとれるとき，φ は Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）-論理式である，ということにする．ただし，この場合には，(3.4) で，変数記号 $x, y, \ldots$ だけでなく，T で導入された定数や関数記号を用いて作った項 t_0, t_1 に対しても，それらを含む論理式を $\mathcal{L}_\in$-論理式に翻訳しなおしたものが Δ_0^T になるとき，Δ_0^T であると言うことにする．たとえば，T が ZFC のとき，$\omega \in x$ や $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = y$ なども Δ_0^T である．

φ が Σ_1^T-論理式かつ Π_1^T-論理式であるとき，φ は Δ_1^T-論理式である，という．

また，ある命題や述語が Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）-論理式で表わせるとき，その命題や述語は Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）である，という言い方もすることにする．

クラス M が推移的とは，集合の推移性と同様，すべての $y \in M$ と $x \in y$ に対し $x \in M$ となることとする．

補題 3.3　M を推移的なクラスとする．このとき，

(0)　すべての Δ_0-論理式は M 上で絶対的である．

(1)　すべての Σ_1-論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

(2)　すべての Π_1-論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

証明　(0): Δ_0-論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ の構成に関する帰納法により，

(3.8)　すべての $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，
　$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \ \leftrightarrow\ \varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ となる

ことを示せばよい．

φ が $x \in y$ または $x \in y$ の形をしているときには，(3.1) により φ^M は φ と一致するから，(3.8) は自明である．

φ が $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \rightarrow \eta)$, $(\psi \leftrightarrow \eta)$, $\neg\psi$ のどれかの形をしていて，ψ と η は (3.8) を満たすなら，(3.2) により，φ も (3.8) を満たすことも明らかである．

φ が $(\exists x \in y)\psi(x, y, x_1, \ldots, x_{n-1})$ の形をしていて，ψ は (3.8) を満たすとする．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ とすれば，$b \in a_0$ で $\psi(b, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ となるものがとれる．M は推移的だから，$b \in M$ である．したがって，ψ の M 上の絶対性の仮定から，$\psi^M(b, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ である．よって，

$$(3.9) \qquad (\exists x \in M)(x \in a_0 \wedge \psi^M(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}))$$

となるが，これは，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ に他ならない．逆に $\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ つまり (3.9) が成り立てば，ψ の M 上の絶対性の仮定から，

$$(3.10) \qquad (\exists x \in M)(x \in a_0 \wedge \psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}))$$

となる．したがって，とくに $\exists x(x \in a_0 \wedge \psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}))$, つまり，$\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ である．

φ が $(\forall x \in y)\psi$ の形をしている場合にも，同様に φ の M 上の絶対性を ψ の M 上の絶対性から帰結できる．

(1): $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を Σ_1-論理式として，$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ は，ある Δ_0-論理式 $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$ に対し，

$$(3.11) \qquad \exists y_0 \cdots \exists y_{m-1}\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$$

という形をしているとする．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，

$$(3.12) \qquad (\exists y_0 \in M) \cdots (\exists y_{m-1} \in M)\psi^M(a_0, \ldots, a_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$$

となる．したがって $b_0, \ldots, b_{m-1} \in M$ で $\psi^M(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1})$ となるものがとれる．ここで (0) により，$\psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1})$ となるから，

(3.13) $\exists y_0 \cdots \exists y_{m-1} \psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, y_0, \ldots, b_{m-1})$

つまり，$\psi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

(2): $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を Π_1-論理式として，$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ は，ある Δ_0-論理式 $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$ に対し，

(3.14) $\forall y_0 \cdots \forall y_{m-1} \psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$

という形をしているとする．$a_0,\ldots a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，すべての $b_0,\ldots, b_{m-1} \in M$ に対し，$\psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1})$ となるから，(0) により，$\psi^M(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1})$ である．したがって，

(3.15) $(\forall y_0 \in M) \cdots (\forall y_{m-1} \in M) \psi^M(a_0, \ldots, a_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$

つまり，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である． (証明終わり)

補題 3.4 T を任意の $\mathcal{L}_\in$ での理論として，M を推移的なクラスで $M \models T$ となっているとする．このとき，

(0) すべての Δ_0^T 論理式は M 上で絶対的である．

(1) すべての Σ_1^T 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と $a_0,\ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

(2) すべての Π_1^T 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と $a_0,\ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，$\varphi^M(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

(3) すべての Δ_1^T-論理式は M 上で絶対的である．

証明 (0), (1), (2) の証明は，それぞれ，補題 3.3 の (0), (1), (2) の証明と全く同様に行なえる[5)]．

(3): (1) と (2) により明らかである． (証明終わり)

系 3.5 T を ZF^-（の十分に大きな部分）を含む公理系とする．M を推移的なクラスとするとき，

(0) $M \models$“外延性公理” である．

5) 補題 3.3 の (0), (1), (2) は，ここでの (0), (1), (2) で $T = \emptyset$ としたものとなっていることに注意する．

(1)　$\emptyset \in M \Leftrightarrow M \models$"空集合公理".

(2)　すべての $a, b \in M$ に対し $\{a, b\} \in M \Leftrightarrow M \models$"対の公理".

(3)　すべての $a \in M$ に対し $\bigcup a \in M \Leftrightarrow M \models$"和集合の公理".

(4)　$\omega \in M \Rightarrow M \models$"無限公理".

(5)　すべての $a \in M$ に対し，$\mathcal{P}(a) \cap M \in M \Leftrightarrow M \models$"べき集合の公理".

(6)　$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha \Rightarrow M \models$"基礎の公理".

証明　(0): 外延性公理の命題は

$$(3.16)\quad \forall x \forall y\big(((\forall z \in x)(z \in y)\ \wedge\ (\forall z \in y)(z \in x))\ \to\ x = y\big)$$

と Π_1-文として表せる．したがって，(3.16) の論理式を φ とすると，補題 3.3, (2) により，φ^M が成り立つ．つまり，$M \models$"外延性公理" である．

(1): "x は空集合である" は

$$(3.17)\quad (\forall y \in x)(y \notin x)$$

と表わすことができるから，Δ_0 である．したがって，補題 3.3, (0) により，$\emptyset \in M$ なら $\emptyset$ は M の意味での空集合となっているから，$M \models$"空集合公理" となる．逆に $M \models$"空集合公理" なら，空集合公理が M で存在を主張している M の意味での空集合は $\emptyset$ となるから $\emptyset \in M$ である．

(2) と (3) は，"$z = \{x, y\}$" と "$y = \bigcap x$" が Δ_0 になることから，(1) の証明と同様に示せる．

(4): $\varphi(x)$ を

$$(3.18)\quad \emptyset \in x\ \wedge\ (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)$$

とすると，無限公理は $\exists x \varphi(x)$ と表される．(3.18) を $\mathcal{L}_\in$-論理式に展開すると Δ_0-論理式になるから $\varphi(\omega)$ により， $\omega \in M$ なら，補題 3.3, (0) から，$M \models \varphi(\omega)$ となる．したがって，このときには $M \models$"無限公理" である．

(5): $a \in M$ に対し，"$x = \mathcal{P}(a)$" は

$$(3.19)\quad \forall z(z \in x\ \leftrightarrow\ z \subseteq a)$$

とあらわせるが，“$z \subseteq a$” は Δ_0 だから，補題 3.3, (0) により，(3.19) の M への相対化は，

$$(3.20)\quad (\forall z \in M)(z \in x \ \leftrightarrow \ z \subseteq a)$$

と同値になる．したがって，$M \models$ “$b = \mathcal{P}(a)$” $\Leftrightarrow$ $b = \mathcal{P}(a) \cap M$ となる．したがって，$M \models$“べき集合の公理” なら，すべての $a \in M$ に対し $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ となり，逆に，すべての $a \in M$ に対し $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ なら， $b = \mathcal{P}(a) \cap M$ とすると，$M \models b = \mathcal{P}(a)$ となり，$M \models$“べき集合の公理” がわかる．

(6): Δ_0-論理式 φ を

$$(3.21)\quad (\exists y \in x)(\forall z \in x)(\neg z \in y)$$

とすると，基礎の公理は，$\forall x\varphi$ と表わせる．φ は Δ_0-論理式だから，補題 3.3 (0) により $(\forall x\varphi)^M$ は $(\forall x \in M)\varphi$ と同値である．一方補題 2.25, (2) により，すべての $a \in \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ 上で $\in$ は整順的だから，とくに $\varphi(a)$ となることがわかる．したがって， $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ なら $M \models$“基礎の公理” である．

(証明終わり)

クラス X が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，$X = \{x : \varphi(x, \dots)\}$ として， $\varphi(x, \dots)$ が Δ_0^T （Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のこととする．

クラス関数 $F(x)$ が Δ_0^T （Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，“$y = F(x)$” が Δ_0^T （Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のこととする．つまりクラス関数が $F(x)$ が Δ_0^T （Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，$F(x)$ の “グラフ” が Δ_0^T （Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のことである．

補題 3.6　T を ZF （または ZF の十分に大きな部分を含む $\mathcal{L}_\in$ での公理系）とする．今クラス関数 $G(x)$ が Σ_1^T なら， $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ で定義される On 上の関数 F は Δ_1^T となる．

証明　“$y = F(\alpha)$” は,

(3.22) $\exists f\,\big(\text{“}f$ は α 上の関数” $\wedge\ \forall\beta<\alpha\ f(\beta)=G(f\restriction\beta)\ \wedge\ y=G(f)\big)$

と表わせるから Σ_1^T である[6]．一方，“$y=F(\alpha)$” は，

(3.23) $\forall f\,\big(\text{“}f$ は $\alpha+1$ 上の関数” $\wedge\ \forall\beta\le\alpha\ (f(\beta)=G(f\restriction\beta))$
$\to\ y=f(\alpha)\big)$

とも表わすことができるから Π_1^T である． (証明終わり)

C を On の部分クラスとするとき，C が閉非有界である，というのを集合の閉非有界性と同様に定義する．つまり C が閉非有界とは，

(3.24) すべての極限順序数 $\alpha\in On$ に対し $C\cap\alpha$ が α で共終なら，$\alpha\in C$ となり，

(3.25) すべての $\alpha\in On$ に対し $\beta>\alpha$ で $\beta\in C$ となるものが存在する

こととする[7]．

定理 3.7 ZF で議論する．φ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，$\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ を φ の部分論理式の全体（φ 自身も含む）とする．このとき，順序数のクラス C_φ を

$$C_\varphi=\{\alpha\in On:\ \text{すべての } i<n \text{ に対し } \varphi_i \text{ は } V_\alpha \text{ 上で絶対的となる}\ \}$$

と定義すると，C_φ は閉非有界となる．

とくに，すべての集合 x に対し，推移的な集合 $y\supseteq x$ で φ が y 上絶対となるようなものが存在する．

証明 φ の構成に関する帰納法で証明する．φ が $x=y$ または $x\in y$ の形の論理式のときには，$C_\varphi=On$ となり定理の主張は明らかである．

---

6) この式が Σ_1^T であることを示すには，φ が Σ_1^T なら $(\forall x\in y)\varphi$ も Σ_1^T となることが示せればよいが，このためには，AC がなくても，基礎の公理と ZF の他の公理（の一部）があれば十分である．

7) κ の部分集合に関する閉非有界性のときと同様に，(3.24) が成り立つとき，C は閉じているという．また (3.25) が成り立つとき，C は非有界であるという．

φ が $\neg\psi$ という形をしていて，ψ に対しては定理の主張が成り立っているときには，$C_\varphi = C_\psi$ となるからよい．

φ が $(\psi \wedge \eta)$ という形をしていて，ψ と η に対しては定理の主張が成り立っているときには，$C_\varphi = C_\psi \cap C_\eta$ となるからよい[8)]．

φ が，$(\psi \vee \eta)$ または $(\psi \to \eta)$ または $(\psi \leftrightarrow \eta)$ の形をしている場合も同様である．

一番問題となるステップは，φ が $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ という形をしていて，ψ に対しては定理の主張が成り立っているときであるが，ここでは φ が $\exists x\psi$ の場合についてのみ考察することにする．$\forall x\psi$ の場合の証明は同様である．

まず，この場合に C_φ が閉じたクラスになっている，つまり (3.24) を満たすことを示す．$\alpha \in On$ を極限順序数として，$C_\varphi \cap \alpha$ が α で共終とする．ψ は φ の部分論理式なので，ψ の部分論理式はすべて φ の部分論理式でもある．よって $C_\varphi \subseteq C_\psi$ である．とくに $C_\psi \cap \alpha$ も α で共終である．したがって，帰納法の仮定から C_ψ は閉じていることから，$\alpha \in C_\psi$ となる．よって，φ が V_α 上で絶対的であることを示せば十分である．

$a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$ で $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ なら，仮定から $\alpha' < \alpha$ で，$a_1, \ldots, a_n \in V_{\alpha'}$ かつ $\alpha' \in C_\varphi$ となるものがとれる．$\alpha' \in C_\varphi$ により，$V_{\alpha'} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ となるから，$V_{\alpha'} \models \exists x\psi(x, a_1, \ldots, a_n)$ である．したがって，$a_0 \in V_{\alpha'}$ で $V_{\alpha'} \models \psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ となるものがある．$\alpha' \in C_\psi$ だから $\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ である．ところが，$\alpha \in C_\psi$ でもあったから，$V_\alpha \models \psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ となり，このことから $V_\alpha \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ がわかる．

逆に $V_\alpha \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ とすると，$a_0 \in V_\alpha$ で $V_\alpha \models \psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ となるものがとれる．$\alpha \in C_\psi$ だったから，$\psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ となる．したがって，$\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ である．

次に C_φ が非有界である，つまり (3.25) が成り立つことを示す．$\alpha \in On$ を任意にとる．このとき，C_ψ の元の上昇列 α_k, $k \in \omega$ を，

(3.26)　$\alpha \leq \alpha_0$;

8)　閉非有界なクラスの共通部分が再び閉非有界なクラスになることは，補題 2.53, (1) と全く同様に示せる．

(3.27)　すべての $a_1,\ldots,a_n \in V_{\alpha_k}$ に対し，$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ なら，$a_0 \in V_{\alpha_{k+1}}$ で $\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ となるようなものが存在する

を満たすようにとる．これは C_ψ が非有界であることから可能である． $\beta = \sup_{n\in\omega}\alpha_n$ とすると，(3.26) から $\alpha \le \beta$ だが，$\beta \in C_\varphi$ となることを次で示す．帰納法の仮定により C_ψ は閉じているから，$\beta \in C_\psi$ である．したがって，φ が V_β 上で絶対的であることを示せば十分である．

$a_1,\ldots,a_n \in V_\beta$ に対し，$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ となっているとする．このとき，$a_1,\ldots,a_n \in V_{\alpha_k}$ となる $k \in \omega$ がとれるが，(3.27) により，$a_0 \in V_{\alpha_{k+1}}$ で，$\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ となるものがある． $\beta \in C_\psi$ だから，$V_\beta \models \psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ となる．したがって，$V_\beta \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ である．

逆に，$V_\beta \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ とすれば，$a_0 \in V_\beta$ で $V_\beta \models \psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ となるものがとれるが，$\beta \in C_\psi$ だから，$\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ となる．したがって，$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ である．　(証明終わり)

上の証明では，累積的階層を特徴付ける性質 $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ はどこにも用いられていない．このことに注意すると，定理 3.7 は次のように一般化することができることがわかる．

C をクラスとして，$D \subseteq C$ とする．論理式 $\varphi(x_0,\ldots x_{n-1})$ に対し，すべての $a_0,\ldots,a_{n-1} \in D$ で $\varphi^C(a_0,\ldots,a_{n-1}) \leftrightarrow \varphi^D(a_0,\ldots,a_{n-1})$ が成り立つとき，$\varphi(x_0,\ldots x_{n-1})$ は C で D 上絶対的であるということにする．

クラス C に対し，On 上の関数 F で，

(3.28)　$\alpha,\beta \in On$ で $\alpha \le \beta$ なら $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$;

(3.29)　$\gamma \in On$ が極限順序数なら $F(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} F(\alpha)$;

(3.30)　$C = \bigcup_{\alpha\in On} F(\alpha)$

が成り立つものが存在するとき，C は累積的であるといい，F を C の階層とよぶ．

定理 3.8　(反映の原理[9]) C を累積的なクラスとして，F を C の階層とする．φ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，$\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ を φ の部分論理式の全体（φ

9)　この定理でのような状況は “反映 (reflection)” または “絶対性 (absoluteness)” と

自身も含む）とする．このとき，順序数のクラス C_φ を

$$C_\varphi = \{\alpha \in On : \text{すべての}\, i < n \,\text{に対し}\, \varphi_i \,\text{は}\, C \,\text{で}\, F(\alpha) \,\text{上絶対的となる}\,\}$$

と定義すると，C_φ は閉非有界となる．

3.2　比較的簡単な相対的無矛盾性の証明

3.1 節で用意した道具を用いて直ちに行なうことのできる相対的無矛盾性の証明をいくつか見ておくことにする．

V_α, $\alpha \in On$ を (2.22)〜(2.24) で定義された累積的階層とし，

(3.31)　$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$

とする．ZF では V は $\{x : x = x\}$ と一致するのだったが，基礎の公理を ZF から除いて得られる体系 ZF^- ではこのことは必ずしも成り立たない．

補題 3.9　ZF^- で議論する．ZF のすべての公理 φ に対し，$V \models \varphi$ となる．

証明　補題 2.24 (1) により V は推移的だから，分出公理と置換公理以外の公理が V で成り立つことは系 3.5 から明らかであるが，ここでは，それらのうち，べき集合の公理についての証明を見ておくことにする．

$a \in V$ とすると，$a \in V_\alpha$ となる $\alpha \in On$ がとれる．補題 2.24 (1) により，$a \subseteq V_\alpha$ である．したがって，$\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$ だから，$\mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha))$ である．一方 (2.23) により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha)) = V_{\alpha+2} \subseteq V$ だから，$\mathcal{P}(a) \in V$ である．よって，系 3.5, (5) により，$V \models$“べき集合の公理” である．

分出公理については，$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として，$A, a_1, \ldots,$ $a_n \in V$ とするとき，$\alpha \in On$ で $A, a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$ となるものがとれるが，補題 2.24 (1) により，$A \subseteq V_\alpha$ だから，(2.23) により

して述べられることが多い．“絶対性” が静的なイメージであるのに対し，“反映” は，ここでの「C の φ に関する性質は $F(\alpha)$, $\alpha \in C_\varphi$ に反映される」というように，動的なとらえ方となっていることに注意する．

$$\{a \in A : V \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\}$$
$$= \{a \in V_\alpha : a \in A \ \wedge \ V \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

となる．したがって， $V \models$“(分出公理)$_\varphi$” となっていることがわかった．

置換公理については，$\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として，$A, a_1, \ldots, a_n \in V$ とし，これらは置換公理での条件を V で満たしているとする．このとき $X = \{b \in V : V \models (\exists a \in A)(\varphi(a, b, a_1, \ldots, a_n))\}$ とすると，X は置換公理により集合だが，$X \subseteq V$ だから， $\alpha \in On$ で $X \subseteq V_\alpha$ となるものが存在する．したがって，(2.23) により，$X \in V_{\alpha+1} \subseteq V$ である．したがって，$V \models$“(置換公理)$_\varphi$” である． (証明終わり)

定理 3.10 ZF^- が無矛盾なら ZF も無矛盾である．

証明 補題 3.9 と 定理 3.2 によりよい． (証明終わり)

ZFC^- のもとでは，V は選択公理も満たすことが，補題 3.9 での分出公理の証明と同様に示せる．このことに留意すると，定理 3.10 でと同様に，次が示せる：

定理 3.11 ZFC^- が無矛盾なら ZFC も無矛盾である．

補題 3.9 と同様の議論で，以下が示せる．

補題 3.12 Z^-(C) で議論する．Z(C) のすべての公理 φ に対し $V_{\omega+\omega} \models \varphi$ が成り立つ[10]．一方，$V_{\omega+\omega}$ では置換公理は成り立たない．

証明 前半の証明は，補題 3.9 と同様に行える[11]．

補題の後半は次のように示せる： $\mathbb{N} \ni n \mapsto V_{\omega+n} \in V_{\omega+\omega}$ は $V_{\omega+\omega}$ で定義可能である．つまり，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ で $n \in \omega$ に対し，

$$b = V_{\omega+n} \quad \Leftrightarrow \quad V_{\omega+\omega} \models n \in \omega \ \wedge \ \varphi(n, b, V_\omega)$$

10) ただし，以下で見るように， Z^-(C) では集合 $V_{\omega+\omega}$ の存在は保証できないので，$V_{\omega+\omega}$ はここではクラス $\bigcup\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ をあらわしている．

11) $V_{\omega+\omega}$ で無限公理が成り立つことを示すために $\omega \in V_{\omega+\omega}$ が必要となることに注意する．たとえば， $V_{\omega+\omega}$ の代わりに V_ω で同様の議論を行なおうとすると，ここのところでうまくゆかなくなる．ちなみに，$V_\omega \models$ “Z^- − 無限公理” である．

となるようなものがとれる．とくに $V_{\omega+\omega} \models \forall n \in \omega \exists! b\, \varphi(n, b, V_\omega)$ となるが，$\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ は $V_{\omega+\omega}$ の元でない．もしこれが $V_{\omega+\omega}$ の元だとすると，$V_{\omega+\omega}$ が和の公理を満たすことから $V_{\omega+\omega} = \bigcup\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ は $V_{\omega+\omega}$ の元となるが，補題 2.25 (2) によりこれは矛盾である．(証明終わり)

補題 3.12 の後半により，次が言えることがわかる：

定理 3.13 (1) Z が無矛盾だとすると，ZF は Z から導くことはできない．

(2) ZC が無矛盾だとすると，ZFC は ZC から導くことはできない．

証明 (1): ZF が矛盾するなら，主張は自明である．もし ZF が無矛盾で ZF のすべての公理が Z から導けるとすれば，$V_{\omega+\omega}$ で ZF のすべての公理が成り立たなくてはならないが，これは 補題 3.12 の後半に矛盾する．

(2): ZFC と ZC の間でも補題 3.12 と同様な命題は成り立つから，(1) と同様の議論で示せる． (証明終わり)

$V_{\omega+\omega}$ を用いると，ZF(C) の定理のうちのいくつかについて，それらが Z(C) からでは証明できないことを示すことができる．たとえば，たとえば，集合 $\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ の存在がそうである．もし Z(C) でこの集合の存在が証明できるとすれば，和集合の公理から， $V_{\omega+\omega}$ も存在することになるが，このことから，補題 3.12 により $V_{\omega+\omega} \in V_{\omega+\omega}$ が言えてしまい矛盾である．

モストフスキーの定理（定理 2.17, 定理 2.29）も Z(C) では示せない: $<$ を $\mathcal{P}(\omega)$ 上の任意の整列順序とすると，$\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle \in V_{\omega+\omega}$ だが，補題 2.24, (3) により $V_{\omega+\omega} \cap On = \omega + \omega$ だから，$otp(\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle) \notin V_{\omega+\omega}$ である．したがって，$V_{\omega+\omega} \not\models$“モストフスキーの定理” がわかるが，$V_{\omega+\omega} \models$ Z(C) だから，モストフキーの定理は Z(C) では証明できないことが結論できる．

基数 κ が到達不可能基数であるとは，

(3.32) κ が正則な極限基数で，

(3.33) すべての $\lambda < \kappa$ に対し $2^\lambda < \kappa$ となる

こととする．以下は ZFC で議論する：

定理 3.14　(1)　κ が到達不可能基数なら，すべての $\alpha < \kappa$ に対し $|V_\alpha| < \kappa$ となる．したがって，$|V_\kappa| = \kappa$ である．

(2)　κ が到達不可能基数なら，任意の $x \subseteq V_\kappa$ に対し，$x \in V_\kappa \Leftrightarrow |x| < \kappa$ である．

(3)　κ が到達不可能基数なら，$V_\kappa \models ZFC$ となる．

(4)　κ を最小の到達不可能基数とするとき，$V_\kappa \models$“到達不可能基数は存在しない” が成り立つ．

証明　(1): 命題の前半は $\alpha < \kappa$ に関する帰納法により示せる．(2.24) により，このことから $|V_\kappa| \leq \kappa$ がわかるが，補題 2.24, (3) により $|V_\kappa| \geq \kappa$ だから，$|V_\kappa| = \kappa$ である．

(2): $x \in V_\kappa$ なら，(2.24) により，$\alpha < \kappa$ で $x \in V_\alpha$ となるものがとれる．したがって，補題 2.24, (1) により，$x \subseteq V_\alpha$ である．したがって，(1) により，$|x| \leq |V_\alpha| < \kappa$ である．逆に $|x| < \kappa$ なら，κ は正則な極限順序数だから，(2.24) により，$\alpha < \kappa$ で，$x \subseteq V_\alpha$ となるものがとれるが，(2.23) と補題 2.24, (2) により，$x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$ である．

(3): V_κ が置換公理以外の ZFC の公理を満たすことは，補題 3.9 でと同様に示せる．置換公理については，$x, a \in V_\kappa$ に対し，$V_\kappa \models (\forall y \in x)\exists! z\, \varphi(y, z, a)$ なら，$x \in V_\kappa$ と (2) により $|x| < \kappa$ である．

したがって，$u = \{x \in V_\kappa : V_\kappa \models (\exists y \in x)\varphi(y, z, a)\}$ とすると，$u \subseteq V_\kappa$ で $|u| < \kappa$ となるから，再び (2) により，$u \in V_\kappa$ がわかる．

(4): “x は到達不可能基数” は V_κ で絶対的となることが容易に示せる．したがって，κ の最小性により κ より小さな到達不可能基数は存在しないから，$V_\kappa \models$“到達不可能基数は存在しない” である．　(証明終わり)

定理 3.13 の証明でと同様に議論すると，定理 3.14, (4) から次が導ける：

定理 3.15　ZFC が無矛盾なら ZFC から，“到達不可能基数が存在する” を導くことはできない．

3.3　集合論の内部での論理とモデル理論

1.2 節での $\mathcal{L}_\in$ や (1.13)〜(1.16) による $\mathcal{L}_\in$-論理式の定義は，集合論の外側で行われており，たとえば，そこでの $\mathcal{L}_\in$-論理式や証明は,「本物の」（紙の上に書かれたものとして考えられるような）論理式や証明であった．しかし，$\mathcal{L}_\in$ や (1.13)〜(1.16) による $\mathcal{L}_\in$-論理式の定義，また証明の概念 etc. は集合論の中で集合や集合上の述語として同様のやり方で導入することができる．集合論の中での集合論の言語も $\mathcal{L}_\in$ とよぶことにして，$\mathcal{L}_\in$-論理式の全体の集合を $Fml_{\mathcal{L}_\in}$ と表し，$\mathcal{L}_\in$-文の全体を $ClFml_{\mathcal{L}_\in}$ と表わすことにする．φ を集合論の外側での "本物" の論理式とするとき，φ に対応する集合としての $\varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in}$ が存在するが，この逆は必ずしも成り立たないし，そもそも，この逆を考えること自体が意味をなさない．たとえば，$(\exists \varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in})(\cdots)$ という形の論理式が ZFC で証明されたとき，この論理式で存在の主張された論理式 φ を対応する "本物の" 論理式 φ が具体的に構成できるとは限らないからである．

ZFC に対応する $ClFml_{\mathcal{L}_\in}$ の部分集合を $\mathtt{ZFC}$ とあらわすことにする．この場合にも，具体的に与えられた論理式 φ が ZFC の公理なら，対応する集合としての論理式 φ は $\mathtt{ZFC}$ の元であるし，φ が ZFC の公理でなければ，対応する集合 φ は $\mathtt{ZFC}$ の元でない．証明，証明可能などの概念も集合論の述語として自然に翻訳できる．たとえば，"$ZFC \vdash \varphi$" は集合論の内部のオブジェクトに関する述語としての翻訳は

$$\left(\exists p \in (Fml_{\mathcal{L}_\in})^{<\omega}\right)\ \left(Bew(\mathtt{ZFC}, p)\ \wedge\ p(\ell(p)-1) = \varphi\right)$$

と表わせる．ここに $\mathtt{T} \in \mathcal{P}(ClFml_{\mathcal{L}_\in})$ と $p \in (Fml_{\mathcal{L}_\in})^{<\omega}$ に対し，$Bew(\mathtt{T}, p)$ は

"$p = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$ として，
$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ は (1.20) の意味で $\mathtt{T}$ からの証明である"

ということを表明する $\mathcal{L}_\in$-論理式とする[12]．

$\mathtt{T} \in \mathcal{P}(ClFml_{\mathcal{L}_\in})$ に対し，T が無矛盾な公理系となっていることを表明する述語 $Con(\mathtt{T})$ も

(3.34)　$\neg(\exists\varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in})\ (\mathtt{T} \vdash \varphi\ \wedge\ \mathtt{T} \vdash \neg\varphi)$

のこととして導入できる．T を上記のような論理学が内部で展開できるだけの表現力を持つ $\mathcal{L}_\in$ での（具体的に与えられた）理論として，T を T に対応する （T の理論の内部での）集合としての公理系とする[13]．このときゲーデルの第二不完全性定理により，

(3.35)　T が無矛盾なら，$T \nvdash Con(\mathtt{T})$ である．

以下では煩雑さをさけるために，とくに違いを強調することが必要な場合を除いて，公理系 T とそれに対応する ZFC の記号の導入により拡張された言語での項 T の，記号上での区別をせずに，両方とも "T" であらわすことにする．ZFC と ZFC などについても同様である．

モデル理論は，集合論の内部で展開されているものと考えられる[14]．ここでは，モデル理論での基礎的な事項のうち $\mathcal{L}_\in$-構造の場合について，第 4 章で必要になるものについて見ておくことにする．

集合 X と X 上の二項関係 E の組 $\langle X, E\rangle$ を $\mathcal{L}_\in$-構造とよぶ．E が $\in$ の X の制限と一致するときには，単に X と書いて $\langle X, \in \cap X^2\rangle$ を表わすことにする — このような構造を $\langle X, \in\rangle$ と表わすこともある．

$\mathcal{L}_\in$-構造 $\langle X, E\rangle$ が与えられたとき，$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in Fml_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in X$ に対し，$\langle X, E\rangle$ で $\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ が成り立つことを表す関係 "$\langle X, E\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$" を次のようにして φ の構成に関する帰納法により定義する：

12)　"Bew" はドイツ語の Beweis（証明）という単語に由来する．

13)　つまり，T は記号の導入によって拡張された $\mathcal{L}_\in$ での定数項（あるいはパラメタを含んだ項）である．

14)　これに対し，1 階の論理の完全性の証明など，数学の基礎に関連した局面でのモデル理論的考察は，できるだけ弱い体系の中で行われる必要がある．完全性定理（の実効的なヴァージョン）は RCA_0 とよばれる初等的な算術の体系上 WKL_0 とよばれる弱い 2 階の算術の体系と同値になることが知られている（たとえば [田中 (一) 1990] または [田中（一） 1997] を参照）．

(3.36) $\langle X,E\rangle \models a=b \;\Leftrightarrow\; a=b$；

(3.37) $\langle X,E\rangle \models a\in b \;\Leftrightarrow\; aEb$；

(3.38) $\langle X,E\rangle \models \psi\wedge\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ かつ $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.39) $\langle X,E\rangle \models \psi\vee\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ または $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.40) $\langle X,E\rangle \models \psi\to\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ ならば $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.41) $\langle X,E\rangle \models \psi\leftrightarrow\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ は $\langle X,E\rangle \models \eta$ と同値；

(3.42) $\langle X,E\rangle \models \neg\psi \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ でない；

(3.43) $\langle X,E\rangle \models \exists x\psi(x,a_0,\ldots) \;\Leftrightarrow\; a\in X$ で $\langle X,E\rangle \models \psi(a,a_0,\ldots)$ となるものが存在する；

(3.44) $\langle X,E\rangle \models \forall x\psi(x,a_0,\ldots) \;\Leftrightarrow\;$ すべての $a\in X$ に対し $\langle X,E\rangle \models \psi(a,a_0,\ldots)$ が成り立つ.

$T\subseteq Fml_{\mathcal{L}_\in}$ に対し

(3.45) $\langle X,E\rangle \models T \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi\in T\langle X,E\rangle \models \varphi$

とする．$\langle X,E\rangle \models T$ のとき，$\langle X,E\rangle$ は T のモデルである，とも言う．

集合論の外の “本物の”$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ に対しては，

$$(\forall x_0,\ldots,x_{n-1}\in M)\Big(\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})^M \;\leftrightarrow\; M\models\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})\Big)$$

となることが φ の構成に関する（集合論の外での）帰納法により示せる．ただし，上の式での “$M\models\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$” は 3.1 節での $\varphi^M(x_0,\ldots,x_{n-1})$ の略記としての記法ではなく，(3.36)〜(3.44) で規定された意味でのものである．

$S\subseteq X$ が $\langle X,E\rangle$ で定義可能であるとは，$\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})\in Fml_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_1,\ldots,a_{n-1}\in X$ で $S=\{a\in X : \langle X,E\rangle\models\varphi(a,a_1,\ldots,a_{n-1})\}$ となるものが存在することとする．

$$Def(\langle X,E\rangle)=\{S\in\mathcal{P}(X) : S \text{ は } \langle X,E\rangle \text{ で定義可能 }\}$$

とする．前と同様に，E が $\in\cap X^2$ のときには，$Def(\langle X,E\rangle)$ と書くかわりに $Def(X)$ と書くことにする．

$\mathcal{L}_\in$-構造 $\langle X, E\rangle$ と $\langle X', E'\rangle$ に対し，$\langle X', E'\rangle$ が $\langle X, E\rangle$ の初等部分構造であるとは，$X' \subseteq X$ で，すべての $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in Fml_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in X'$ に対し，

$$\langle X', E'\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \quad \leftrightarrow \quad \langle X, E\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

が成り立つことである．$\langle X', E'\rangle$ が $\langle X, E\rangle$ の初等部分構造のとき，これを $\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ とあらわす．初等部分構造の定義から $\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ なら $E' = E \cap X'^2$ である．$E = \in \cap X^2$ なら，$\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ を $X' \prec X$ と略記する．

$\langle X, E\rangle$ と $\langle Y, F\rangle$ を $\mathcal{L}_\in$-構造とする．すべての $\varphi \in ClFml_{\mathcal{L}_\in}$ に対し $\langle X, E\rangle \models \varphi \Leftrightarrow \langle Y, F\rangle \models \varphi$ が成り立つとき，$\langle X, E\rangle$ と $\langle Y, F\rangle$ は初等同値であるといい，これを $\langle X, E\rangle \equiv \langle Y, F\rangle$ であらわす．$\langle X, E\rangle \prec \langle Y, F\rangle$ なら $\langle X, E\rangle \equiv \langle Y, F\rangle$ だが，逆は必ずしも成り立たない．初等同値性についても，E と F がそれぞれ $\in \cap X^2$ と $\in \cap Y^2$ に一致する場合には，二項関係を省略して $X \equiv Y$ とも表わすことにする．

次はローベンハイム=スコーレムの定理を $\mathcal{L}_\in$-構造に限定したヴァージョンである：

定理 3.16 (ローベンハイム=スコーレムの定理)　ZFC で議論する．X を無限集合として E を X 上の二項関係とする．このとき任意の無限集合 $A \subseteq X$ に対し，$\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ で，$A \subseteq X'$ かつ $|X'| = |A|$ となるものが存在する．

定理 3.16 は，定理 3.7 の証明と類似のアイデアによって示せる．子細については本シリーズ第 2 巻を参照されたい．

次の定理は，集合論での議論で $\mathcal{L}_\in$-構造 $\langle X, E\rangle$ を考察する必要のある局面で，E が $\in$ の X への制限になっているような構造のみを扱うことにしても，そのことがそれほど大きな制約とならないことを示唆している：

定理 3.17　T を ZFC の有限個の公理の集まりとするとき[15]，可算で推移

15) 証明の文脈からもわかるように，ここでの “有限個の公理の集まり” は公理系の外での “本物の” 有限個の公理の集まりである．

的な集合 M で $M \models T$ となるものが存在する．

証明　T は $\mathcal{L}_{\in}$-文 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ からなるとする．必要なら T を拡張して外延性公理が T に含まれているとしてよいから，例えば φ_0 がそれであるとする．φ^* を $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ とする．このとき定理 3.7 により，$\alpha \in On$ で φ^* が V_α 上で絶対的になるものが存在する．とくに $V_\alpha \models \varphi^*$ である．ローベンハイム=スコーレムの定理（定理 3.16）により，可算な V_α の初等的部分構造 $N \prec V_\alpha$ が存在する． $N \models \varphi^*$ だから，とくに $N \models \varphi_0$ である．したがって N は外延的である．よって，N のモストフスキー崩壊 $\pi : \langle N, \in \rangle \overset{\cong}{\to} \langle M, \in \rangle$ がとれる．モストフスキー崩壊の定義から M は推移的であるが，さらに，$\langle M, \in \rangle$ は $\langle N, \in \rangle$ と同型だから，M は可算で，$M \models \varphi^*$, つまり $M \models T$ となる．　(証明終わり)

T と T' を（具体的に与えられた）$\mathcal{L}_{\in}$ での理論で，すべての T の公理 φ に対し，$T' \vdash \varphi$ が成り立つとする．$\mathtt{T}$ を T の（T' を公理系とする）集合論の内部への翻訳とする．このとき

(3.46)　$T' \vdash Con(\mathtt{T})$

が成り立つなら，(3.35) により，T' は T より真に強い公理系となっているが，このようなとき，T' は T より無矛盾性の強さが大きいという[16]．

補題 3.18　T と T' および $\mathtt{T}$ を上のようにとるとき，$T' \vdash \exists M \exists E\ (\langle M, E \rangle \models \mathtt{T})$ なら，$T' \vdash Con(\mathtt{T})$ となる．つまりこのときには T' は T より無矛盾性の強さの大きな理論である．

とくに，T が無矛盾なら，$T \nvdash \exists M \exists E\ (\langle M, E \rangle \models \mathtt{T})$ である．

証明　T の中で議論する[17]．M を $\mathtt{T}$ のモデルとすると，

16)　意味の上からは “矛盾性の強さ” と言った方がいいのかもしれないが，この用語は定着しているし，T' として矛盾する公理系をとることが本来の意味ではないので，その意味では “矛盾性の強さ” とすると誤解を生じる可能性のある用語になってしまうかもしれない．
17)　“T の中で” というのは歯切れの悪い表現だが，これは，“ZFC の中で” という表現の一般化で，要するに，形式的には “T から $\vdash$ の意味で形式的に証明される命題たちの描く世界で” というような意味である．

$$\{\varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in} : \mathtt{T} \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in} : M \models \varphi\} \neq Fml_{\mathcal{L}_\in}$$

となるから $Con(\mathtt{T})$ がわかる．

後半の命題は，このことと (3.35) によりよい． (証明終わり)

定理 3.19 (0) Z は二階の数論より無矛盾性の強さが大きい[18]．

(1) ZF は Z より無矛盾性の強さが大きい．

(2) ZFC は ZC より無矛盾性の強さが大きい．

(3) ZFC+$\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) は ZFC より無矛盾性の強さが大きい．

証明 (0): Z で $\langle\omega, \mathcal{P}(\omega), \ldots\rangle$ は二階の算術のモデルになっているから，補題 3.18（を対応する言語に対して記述しなおしたもの）によりよい．

(1): $V_{\omega+\omega}$ は集合であることに注意して，補題 3.12 の証明と同じ議論を ZF^- の中で行なうことにより，$V_{\omega+\omega} \models \mathtt{Z}$ が証明できる．ここに $\mathtt{Z}$ は，Z に対応する ZF^- の中での $Fml_{\mathcal{L}_\in}$ の部分集合である．したがって，補題 3.18 によりよい．

(2): (1) と同様の議論を ZFC^- の中で行なうと $V_{\omega+\omega} \models \mathtt{ZC}$ が示せるから，補題 3.18 によりよい．

(3): ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) の中で議論すると，定理 3.14 の議論を行なうことにより，κ を到達不可能基数として，$V_\kappa \models \mathtt{ZFC}$ が示せる．したがって，補題 3.18 によりよい． (証明終わり)

18) 二階の数論については例えば，[田中 (一) 1990], [田中（一） 1997] などを参照されたい．

第4章
構成的集合と強制法

本章では，ゲーデルによる選択公理と一般連続体仮説の ZF 上の無矛盾性の結果（定理 4.9）とコーエンによる，これらの命題の ZF 上の独立性の結果（定理 4.17, 定理 4.18, 定理 4.19）の証明を与える．4.1 節では，ゲーデルの結果の証明のために必要となる構成的集合の理論の基礎的な部分を導入し，4.2 節でコーエンの証明 [Cohen 1963, 1964] で用いられたテクニックの発展継承である強制法の現代的な理論の概説を行う．

4.1　構成的集合

以下この節では ZF を含む公理系 T の中で議論する．実は議論の道筋を入念に選ぶと，“ZF^- を含む公理系 T” と条件を弱めることもできる．T は ZF であったり ZFC であったり，あるいは，ZFC の何らかの拡張であったりし得る．構成的集合[1)]の全体のクラス L を，次のようにして帰納的に定義される L_α, $\alpha \in On$ を用いて，$L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$ として定義する．

(4.1)　$L_0 = \emptyset$;

1)　「構成的集合」でなく「構成可能集合」という訳語があてられることもあるが，ここでの構成可能性は，順序数の全体 On 上での超限帰納法を仮定した上での括弧つきの「構成可能性」なので，これを「構成可能集合」と言いきってしまうと誤解を生じやすいような気がする．

(4.2) $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$;

(4.3) γ が極限順序数のとき，$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$.

補題 4.1 (0) すべての $\alpha \in On$ に対し，L_α は推移的である．したがって，L も推移的である．

(1) $\alpha, \beta \in On$ で $\alpha \leq \beta$ なら $L_\alpha \subseteq L_\beta$ となる．

(2) すべての $\alpha \in On$ に対し，$L_\alpha \subseteq V_\alpha$ である．

(3) すべての $\alpha \in On$ に対し $On \cap L_\alpha = \alpha$ となる．

(4) クラス関数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} である．

証明 (0): $\alpha \in On$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ に対しては，(4.1) によりよい．L_α が推移的として，$x \in L_{\alpha+1}$ で $y \in x$ とすると，(4.2) により，$x \subseteq L_\alpha$ だから $y \in L_\alpha$ となる．したがって，帰納法の仮定から $y \subseteq L_\alpha$ だから，

$$y = \{z \in L_\alpha : z \in y\} = \{z \in L_\alpha : L_\alpha \models z \in y\}$$

と表わせる．したがって，$y \in Def(L_\alpha)$ となるが (4.2) により $Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ である．したがって，$L_{\alpha+1}$ も推移的であることがわかる．γ が極限順序数で $L_\alpha, \alpha < \gamma$ がすべて推移的なら，$\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ も推移的となるが，(4.3) により $L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ である．

(1): $\beta \in On$ に関する帰納法で

(4.4) すべての $\alpha < \beta$ に対し $L_\alpha \subseteq L_\beta$

を示す．$\beta = 0$ なら (4.4) は明らかである．β に対し (4.4) が成り立つとして，$\beta + 1$ に対しても成り立つことを示す．このためには $L_\beta \subseteq L_{\beta+1}$ が示せれば十分である．$x \in L_\beta$ とすると，(0) により $x \subseteq L_\beta$ だから，

$$x = \{z \in L_\beta : z \in x\} = \{z \in L_\beta : L_\beta \models z \in x\}$$

となり，$x \in Def(L_\beta) = L_{\beta+1}$ がわかる．したがって，$L_\beta \subseteq L_{\beta+1}$ である．γ が極限順序数で，すべての $\beta < \gamma$ に対して (4.4) が成り立てば，(4.3) により，γ に対しても (4.4) が成り立つことは明らかである．

(2): $\alpha \in On$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときには，(4.1) により明らかである．$\alpha \in On$ に対し $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ が成り立ては，(4.2) により

$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

である．

$\gamma \in On$ が極限順序数ですべての $\alpha < \gamma$ に対し $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ なら，(4.3) により，$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha = V_\gamma$ が成り立つ．

(3): $\alpha \in On$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときには，(4.1) により明らかである．α に対し $On \cap L_\alpha = \alpha$ が成り立つとすれば，(1) により，$\alpha = On \cap L_\alpha \subseteq On \cap L_{\alpha+1} = On \cap Def(L_\alpha) \subseteq \alpha + 1$ だが，(0) と補題 3.3, (0) により，

$$\alpha = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x \text{ は推移的で } \in \text{ は } x \text{ 上の全順序となる}\}$$

である．したがって，$\alpha \in Def(L_\alpha)$ となり $On \cap L_{\alpha+1} = \alpha + 1$ がわかる．γ が極限順序数で $\alpha < \gamma$ に対し $On \cap L_\alpha = \alpha$ が成り立てば，(4.3) により，

$$On \cap L_\gamma = On \cap (\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma}(On \cap L_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \alpha = \gamma$$

となる．

(4): $Def(x)$ は Σ_1^{ZF} だから，補題 3.6 によりよい． (証明終わり)

定理 4.2 すべての ZF の公理 φ に対し $L \models \varphi$ が成り立つ．

証明 補題 4.1, (0) により L は推移的だから，系 3.5 が L に適用できる．また，補題 4.1, (1) と (4.3) により，L は累積的で，$\alpha \mapsto L_\alpha$ は L の階層になっているから，反映の原理（定理 3.8）が適用できることにも注意する．

外延性公理：系 3.5, (0) により，$L \models$“外延性公理” である．

空集合公理：$\emptyset \in L_1 \subseteq L$ だから，系 3.5, (1) により，$L \models$“空集合公理” である．

対の公理：$a, b \in L$ とすると，$a, b \in L_\alpha$ となる $\alpha \in On$ がとれるが，$\{a, b\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x = a \vee x = b\}$ だから，$\{a, b\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5, (2) により，$L \models$“対の公理” である．

和集合の公理： $a \in L$ に対し，$a \in L_\alpha$ となる $\alpha \in On$ をとると，補題 4.1, (0) により，$a \subseteq L_\alpha$ である．したがって，ふたたび補題 4.1, (0) により，すべての $b \in a$ に対し，$b \in L_\alpha$ となるから $b \subseteq L_\alpha$ である．よって，$\bigcup a \subseteq L_\alpha$ となるから，$\bigcup a = \{c \in L_\alpha : L_\alpha \models (\exists x \in a)(c \in x)\}$ により，$\bigcup a \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5, (3) により，$L \models$"和集合の公理" が分かる．

分出公理： $\varphi(x, x_1, \ldots, _n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として a, $a_1, \ldots a_n \in L$ とする．$b = \{z \in a \cap L : L \models \varphi(z, a_1, \ldots, a_n)\}$ が L の元となることを示せばよい．$a \subseteq L$ だから，

$$b = \{z \in a : L \models \varphi(z, a_1, \ldots, a_n)\}$$

である．定理 3.8 により，$\alpha \in L$ で，a, $a_1, \ldots a_n \in L_\alpha$ かつ $\varphi(x, x_1, \ldots, _n)$ は L で L_α 上絶対的になるようなものがとれる．このとき，

$$b = \{z \in L_\alpha : L_\alpha \models z \in a \ \wedge \ \varphi(z, a_1, \ldots, a_n)\}$$

だから，$b \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，$L \models$"(分出公理)$_\varphi$" がわかる．

無限公理：補題 4.1, (3) により $\omega+1 = On \cap L_{\omega+1}$ だから，$\omega \in L_{\omega+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5, (4) により $L \models$"無限公理" が成り立つ．

べき集合の公理： $a \in L$ とすると $\mathcal{P}(a)$ は集合だから $\alpha \in On$ で $a \in L_\alpha$ かつ $\mathcal{P}(a) \cap L = \mathcal{P}(a) \cap L_\alpha$ となるものがとれる．このとき，

$$\mathcal{P}(a) \cap L_\alpha = \{y \in L_\alpha : y \subseteq a\} = \{y \in L_\alpha : L_\alpha \models y \subseteq a\}$$

である．したがって，$\mathcal{P}(a) \cap L \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．

置換公理： L が置換公理を満たすことは，分出公理と同様に証明できる．

基礎の公理： 補題 4.1,(2) と系 3.5, (6)　によりよい．　　　(証明終わり)

$\forall x \exists \alpha \in On(x \in L_\alpha)$ という主張（$\mathcal{L}_\in$-文）を $V = L$ とあらわすことにする．

定理 4.3　　$L \models V = L$.

証明　定理 4.2, 補題 4.1, (4) および，補題 3.4, (3) により，クラス関数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ は L 上で絶対的である．補題 4.1, (3) により，$On \subseteq L$ だから，$L^L = L$, したがって $L \models V = L$ となることがわかる．　(証明終わり)

推移的なクラス M で，$On \subseteq M$ かつ，$M \models$ZF となるものを ZF の内部モデルとよぶ．補題 4.1, (0),(3), 定理 4.2 により，L は ZF の内部モデルである．さらに次が成り立つ：

定理 4.4　L は最小の ZF の内部モデルである．つまり，M を任意の ZF の内部モデルとするとき，$L \subseteq M$ が成り立つ．

証明　M を ZF の内部モデルとするとき，定理 4.3 の証明と同様に，$L = L^M \subseteq M$ が示せる．　(証明終わり)

次に L が強い形の選択公理を満たすことを示すが，このためにまず辞書式順序と，それに類似の順序構造の構成法を見ておくことにする．

X を集合として，$\leq_X$ を X 上の線型順序とする．$n \in \omega \setminus \{0\}$ とするとき，X^n 上の $\leq_X$ に関する辞書式順序 $\leq^\ell_{X^n}$ を $\vec{a}, \vec{b} \in X^n$ に対し，

(4.5)　$\vec{a} \leq^\ell_{X^n} \vec{b} \;\Leftrightarrow\; i < n$ で $\vec{a} \restriction i = \vec{b} \restriction i$ かつ $a(i) \leq_X b(i)$ となるものが存在する

として定義する．$\leq^\ell_{X^n}$ が線型順序となることは容易にわかる．さらに $\leq_Y$ を集合 Y 上の線型順序とするとき，$X \times Y$ 上の $\leq_X$ と $\leq_Y$ に関する辞書式順序 $\leq^\ell_{X\times Y}$ を，$\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle \in X \times Y$ に対し，

(4.6)　$\langle a, a'\rangle \leq^\ell_{X\times Y} \langle b, b'\rangle \;\Leftrightarrow\; a \leq_X b$ または $a = b$ かつ $a' \leq_Y b'$

として定義する．$\leq^\ell_{X\times Y}$ も線型順序となることを見るのは容易である．

最後に，X と X 上の線型順序 $\leq_X$ に対し $X^{<\omega}$ 上の順序 $\leq_{X^{<\omega}}$ を，$\vec{a}$, $\vec{b} \in X^{<\omega}$ に対し，

(4.7)　$\vec{a} \leq_{X^{<\omega}} \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \ell(\vec{a}) < \ell(\vec{b})$ または，$\ell(\vec{a}) = \ell(\vec{b}) = n$ かつ $\vec{a} \leq^\ell_{X^n} \vec{b}$

により定義する．$\leq_{X^{<\omega}}$ は $X^{<\omega}$ 上の線型順序となる．

次は容易に示せる：

補題 4.5 (1) $\langle X, \le_X\rangle$ が整列順序集合なら，すべての $n \in \omega \setminus \{0\}$ に対し $\le^{\ell}_{X^n}$ も X^n 上の整列順序となる．

(2) $\langle X, \le_X\rangle$ と $\langle Y, \le_Y\rangle$ が共に整列順序集合なら，$\le^{\ell}_{X\times Y}$ も $X \times Y$ 上の整列順序となる．

(3) $\langle X, \le_X\rangle$ が整列順序集合なら，$\le_{X^{<\omega}}$ も $X^{<\omega}$ 上の整列順序となる．

$Fml_{\mathcal{L}_\in}$ は可算だから，$Fml_{\mathcal{L}_\in}$ に順序型が ω になる整列順序 $\le_{Fml_{\mathcal{L}_\in}}$ を入れることができることに注意しておく．

$\alpha \in On$ に対し L_α 上の整列順序 $\le_{L_\alpha}$ を，$\le_{L_\alpha}$, $\alpha \in On$ が $\subseteq$ に関する上昇列になるよう次のように帰納的に定義する：

(4.8) $\le_{L_0} = \emptyset$;

(4.9) $\le_{L_\alpha}$ がすでに定義されたとき，$\le_{L_{\alpha+1}}$ を，$a, b \in L_{\alpha+1}$ に対し，

$$\begin{aligned} a \le_{L_{\alpha+1}} \;\Leftrightarrow\;\; & a = b \;\vee\; (a, b \in L_\alpha \;\wedge\; a \le_{L_\alpha} b) \\ & \vee (a \in L_\alpha \;\wedge\; b \notin L_\alpha) \\ & \vee \Big(a \notin L_\alpha \;\wedge\; b \notin L_\alpha \\ & \quad \wedge\; (\exists \vec{a}, \vec{b} \in (L_\alpha)^{<\omega})\,(\exists \varphi_0, \varphi_1 \in Fml) \\ & \qquad \Phi(a, b, \vec{a}, \vec{b}, \varphi_0, \varphi_1, L_\alpha, \le_{L_\alpha})\Big) \end{aligned}$$

として定義する；

(4.10) γ が極限順序数なら，$\le_{L_\gamma} = \bigcup_{\alpha<\gamma} \le_{L_\alpha}$ とする．

ここに，$\Phi(u, v, \vec{u}, \vec{v}, \varphi_0, \varphi_1, X, \le_X)$ は，

"$u = \{x \in X : X \models \varphi_0(x, \vec{u})\}$, $v = \{x \in X : X \models \varphi_1(x, \vec{v})\}$ で，$\langle \varphi_0, \vec{u}\rangle$ と $\langle \varphi_1, \vec{v}\rangle$ はそれぞれ $\le_{Fml_{\mathcal{L}_\in}}$ と $\le_{X^{<\omega}}$ に関する辞書式順序でこのようなもののうち最小なものとするとき，この順序に関して $\langle \varphi_0, \vec{u}\rangle$ は $\langle \varphi_1, \vec{v}\rangle$ より小さい"

を表わす $\mathcal{L}_\in$-論理式とする．

ここで L 上の関係 $\le_L$ を $a, b \in L$ に対し，

(4.11) $a \le_L b \;\Leftrightarrow\; (\exists \alpha \in On)(a, b \in L_\alpha \;\wedge\; a \le_{L_\alpha} b)$

により定義する．L は $\leq_L$ により整列されるが，$\leq_L$ は

$$(4.12)\quad a \leq_L b \;\Leftrightarrow\; (\forall \alpha \in On)(a, b \in L_\alpha \;\rightarrow\; a \leq_{L_\alpha} b)$$

とも書けるから，Δ_1^{ZF} であることがわかる．したがって，補題 3.4, (0) と 補題 3.4, (2) により，$L \models$“$\leq_L$ は L を整列する” となることがわかる．とくに L のすべての元 a は $\leq_L$ の a への制限により整列されるから，整列可能性定理（定理 2.31）の後の注意により，次がわかる：

定理 4.6　$V = L$ の仮定のもとで AC が成り立つ．

定理 4.2 と定理 4.3 により，定理 4.6 から，$L \models AC$ が帰結できることに注意する．

次の補題は L で一般連続体仮説 (GCH) が成り立つこと（定理 4.8）の証明で必要となる：

補題 4.7　$\mathcal{L}_\in$-文 φ_L で，すべての推移的な M に対し

$$(4.13)\quad M \models \varphi_L \;\Leftrightarrow\; \text{ある極限順序数 } \alpha \in On,\, \alpha > \omega \text{ に対し } M = L_\alpha$$

となるようなものが存在する．

証明　φ_L を，

$$(4.14)\quad \text{“}On^M \text{ は最大元を持たず，} L_\alpha,\, \alpha \in On^M \text{ は } M \text{ の被覆になる”}$$

を主張するような $\mathcal{L}_\in$-文とすればよい．　(証明終わり)

定理 4.8　$V = L$ の仮定のもとで GCH が成り立つ．

証明　κ を基数とする．x を $x \subseteq \kappa$ となる集合とする．このとき，仮定から，$\alpha \in On$, $\varphi \in Fml_{\mathcal{L}_\in}$, $a_1, \ldots, a_n \in L_\alpha$ で

$$(4.15)\quad x = \{\xi \in \kappa : L_\alpha \models \varphi(\xi, a_1, \ldots, a_n)\}$$

となるものがとれる．γ を $\alpha < \gamma$ となる極限順序数とする．このとき，ローベンハイム・スコーレムの定理（定理 3.16）により，$M \prec L_\gamma$ で $\kappa+1 \subseteq M$,

$\alpha, a_1, \ldots, a_n \in M$ かつ，$|M| = \kappa$ となるものが存在する．$M \equiv L_\gamma$ だから，M は外延的である．したがって，モストフスキーの崩壊補題（定理 2.29）により，M のモストフスキー崩壊 $\pi : M \overset{\cong}{\to} N$ が存在する．補題 2.30 により $\pi \restriction \kappa + 1 = id_{\kappa+1}$ となるから，$\alpha' = \pi(\alpha), a_1' = \pi(a_1), \ldots, a_n' = \pi(a_n)$ とすると，

$$(4.16) \quad x = \{\xi \in \kappa : N \models \text{“}L_{\alpha'} \models \varphi(\xi, a_0', \ldots, a_n')\text{”}\}$$

となる．一方 $N \equiv L_\gamma$ だから $N \models \varphi_L$ である．したがって，補題 4.7 により，ある極限順序数 ξ に対し $N = L_\xi$ となる．$|N| = \kappa$ だから，$\xi < \kappa^+$ である．よって，$x \in L_{\kappa^+}$ である．以上から $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ となることがわかったが，$|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$ だから，$2^\kappa \leq \kappa^+$ である． (証明終わり)

定理 4.2 と定理 4.3 により，定理 4.8 から，$L \models GCH$ となることに注意する．

定理 4.9 (ゲーデル，[Gödel 1938]) ZF が無矛盾なら，ZF + AC + GCH も無矛盾である．

証明 定理 4.2, 定理 4.6, 定理 4.3, 定理 4.8, および定理 3.2 によりよい． (証明終わり)

最後に 2.6 節の p.66 で保留にしてあった証明を記しておくことにする．基数 κ が弱到達不可能とは，正則な極限基数であることとする．GCH のもとでは，κ が弱到達不可能であることと，到達不可能であることは同値であることに注意する．

定理 4.10 ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) と ZFC+ $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) は無矛盾等価である．

証明 κ が到達不可能基数なら弱到達不可能となることは定義から明らかだから，ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) が無矛盾なら，ZFC + $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) も無矛盾である．

逆に ZFC + $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) のもとで，κ を弱到達不可能基数とすると，“x は弱到達不可能基数” は Π_1^{ZF} で，定理 4.2 により $L \models$

ZF だから，κ は L でも弱到達不可能となる．ここで 定理 4.8 により，$L \models GCH$ だから，$L \models$ "κ は到達不可能基数" となる． したがって，$L \models \exists\kappa(\kappa$ は到達不可能基数) である．したがって，定理 3.2 により，ZFC $+ \exists\kappa(\kappa$ は到達不可能基数) も無矛盾である． (証明終わり)

定理 4.11 ZFC が無矛盾なら，$ZFC \not\vdash$ "$\exists\kappa(\kappa$ は弱到達不可能) である．

証明 定理 4.10 と定理 3.15 によりよい． (証明終わり)

L の構造や，そこで成り立つ無限組み合せ論的性質は，その後さらにイェンセン (Ronald Jensen) と彼の周辺の研究者たちによって，より精密に調べられている．これについてはたとえば， [Devlin 1984] を参照されたい．なお，このイェンセンによって始められた L の構造研究は，微細構造の理論と呼ばれている．

到達不可能基数より本質的にずっと大きな可測基数などの "巨大基数" の存在のもとでは $V = L$ は成り立たないことが知られている（第 II 部を参照）．しかし，L のような階層構造を持った内部モデルで，このような巨大基数の存在も許すようなものの研究も多くなされている（第 II 部と，そこで挙げられている参考文献を参照）．巨大基数の存在は，定理 3.15 でも見たように，ZFC から証明することはできないが，ある種類の巨大基数の存在を許すような階層構造を持つ内部モデルの存在は，そのような巨大基数の存在を主張する公理の妥当性に対するある種の保証になっていると見ることもできるであろう．このような背景から，より大きな巨大基数に対し，その存在を許す（細部構造を持った）内部モデルの可能性を探究してゆく，というイェンセンによる研究方針は，内部モデルプログラムと呼ばれるが，彼の名を冠してイェンセンのプログラムと呼ばれることもある．

4.2 強制法

強制法は，歴史的には連続体仮説の否定の集合論からの無矛盾性証明のためにコーエン (Paul Cohen 1934–) によって 1960 年代初めに導入された

([Cohen 1963, 1964]）．この手法はソロヴェイ (Robert Solovay) らによって一般化され，様々な命題の集合論との無矛盾性の証明に威力を発揮する強力なツールとなった．現在では，[Kunen 1980] や [Jech 1978/2003] のような標準的な教科書により,（少なくとも欧米では）学部の講義でも普通に取り上げられることもあり，誰でもマスターできる標準的な数学的技法となっている．

本節では，強制法の理論の概略を現代的なセッティングで導入した後[2)]，コーエンの結果の証明のスケッチを与える（以下の説明で省略した技術的な細部については，たとえば [Kunen 1980] を参照されたい）．

強制法は，非形式的には，ZFC のモデル V が与えられたとき，V の外に generic フィルター（または generic 集合）と呼ばれる新しい集合 G をとり，V と G から定義される新しい ZFC のモデル（generic 拡大） $V[G] \supseteq V$ を構成する手法である，と言うことができる．後で見るように，ある数学的命題 φ が成り立つような $V[G]$ を構成することで $ZFC + \varphi$ の無矛盾性を結論することができる．

これは，たとえば，環，つまり環論の公理系のモデル R が与えられたとき,（R の外にある）変数記号 x を使って多項式環 $R[x] \supseteq R$ （これも環論の公理系のモデルになっている）を得る，という構成法と比較することができるであろう[3)]．

しかし，ZFC のモデルに関しては，上のように述べてしまうと，厳密には色々と問題が生じてくる．まず，環論のモデル $R[x]$ の構成の例でもそうだったが，このような構成自身は，集合論の中，あるいは，形式的には ZFC の公理系から演繹される命題の世界の中で行われることになる．ところが，ゲーデ

2)　コーエンの [Cohen 1963, 1964] での強制法は，現代の用語ではコーエン強制と呼ばれる，後述の定理 4.17 や定理 4.18 などで用いられた特別な場合のみの考察されたもので，現代の強制法の理論と比べると未整理な細部も含むものであった．現代の強制法の理論とほぼ等しい定式化による強制法が導入された一般に入手可能な文献の最初のものの 1 つは [Shoenfield 1971] であった．なお強制法を用いている現代の文献では強制法の定式化の参照文献として [Kunen 1980] があげられることが多い．

3)　複数の変数記号 $x_1, x_2, \ldots$ を使って $R[x_1, x_2, \ldots]$ をとり，さらに適当なイデアル I で割って環 $R[x_1, x_2, \ldots]/I$ を得る，という構成法の方が，ある意味で，generic 拡大との，より密接なアナロジーを与えると言えるかもしれない．

ルの不完全性定理 [Gödel 1931] により，ZFC の中では ZFC 自身の（集合）モデルの存在は証明できない（補題 3.18）から，上のように議論するためには，議論の枠組としては，ZFC より強い何らかの公理系（たとえば，ZFC に巨大基数の公理を何か１つ付け加えたもの）をとる必要がでてくる．しかし， 強制法の目的は，それによって得られたモデル $V[G]$ で，ある数学的命題 φ が成り立つことを示し，そのことから ZFC + φ の無矛盾性の証明をすることであるから，そのような議論を集合論より強い体系内で行わなくてはいけない，という制約は非常に具合が悪い．V をすべての集合からなる “本物の” 集合論のモデルとして議論することも考えられるが，こうすると，“すべての集合と異なる，新しい集合 G を V の外側からとる” ということの意味が不明になってしまう．

このような困難を回避するには，たとえば次のように議論すればよい[4)]．ZFC' を ZFC の任意の（しかし具体的に与えられた）有限個の公理からなる（しかし後で必要となる ZFC の公理はすべて含むような）部分公理系とする[5)]．このようなものに対しては，“推移的な可算集合 M で $\langle M, \in\rangle$ が ZFC' を満たすようなものが存在する” という命題が ZFC の中で証明できるのだった（定理 3.17）．

ある集合論的命題 φ に対し，このような M をとり，G をうまく選ぶと，$\langle M[G], \in\rangle$ が ZFC' と φ を満たすようにとれるなら，φ の否定 $\neg\varphi$ は ZFC' から証明することができないことがわかる: $\langle M[G], \in\rangle$ が ZFC' を満たすことから，もし $\neg\varphi$ が ZFC' から証明できたとすると $\langle M[G], \in\rangle$ は $\neg\varphi$ も満たさなくてはならなくなり，ZFC から矛盾が証明できてしまうからである．ここで ZFC' は “十分に大きい” ことを除くと任意の ZFC の有限部分だったから，$\neg\varphi$ が ZFC から証明できないことが証明できたことになる．

強制法の理論の技術的な細部をもう少し詳しく見てみることにする[6)]．(後

4)　ここでの問題は，$p, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ 上の関係 $p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ を用いて議論することによっても解消できる．詳しくは [Kunen 1980] の Ch.VII §9 を参照されたい．

5)　ごく厳密に言うと，以下の $M[G]$ の構成では，ZFC' にさらにいくつかの ZFC の公理を付け足して，以下で説明する 強制法の議論もそこで展開できる程度の余裕を持った（しかし依然として有限な）公理系 ZFC'' に拡張しておき，ZFC'' の公理をすべて満たすような M をとる必要がある．

6)　以下の議論は ZFC の公理系から演繹される命題の記述する世界（直観的には集合論

の議論で必要となるようなすべての ZFC の公理を含んでいる，という意味で）十分に大きな，有限な ZFC の部分体系 ZFC' に対し，M を上のようなものとする．M は ZFC' を満たすので，ほとんど ZFC のモデルであるかのように扱うことができる．そこで，以下では煩雑をさけるために ZFC' と書くかわりに ZFC と書いてしまうことにする．M の元 $P = \langle P, \leq \rangle$ が強制概念であるとは，P が最大元 1_P を持つ擬順序であることとする[7]．$D \subseteq P$ が P で稠密とは，すべての $p \in P$ に対し，$q \in D$ で $q \leq p$ となるものがとれることである．（必ずしも M に要素として属さない）$G \subseteq P$ が P 上のフィルターであるとは，

(4.17) G は上方向に閉じていて，

(4.18) 任意の $p, q \in G$ に対し，$r \leq p, q$ となる $r \in G$ が存在する

こととする[8]．P 上のフィルター G が M-generic フィルターであるとは，

(4.19) P で稠密な $D \in M$ に対し，$D \cap G \neq \emptyset$ が常に成り立つ

こととする（G は M 上の P-generic フィルターである，または，G は (P, M)-generic フィルターである，という言い方をすることもある）．

補題 4.12 任意の強制概念 $P \in M$ と $p \in P$ に対し P 上の M-generic フィルターで p を含むものが（M の外で）構成できる．

証明 M は可算だったから，M の要素 D で P の稠密部分集合となっているものは（M の外で見ると）可算個しかない．したがって，これらを D_0, $D_1, D_2, \ldots$ と枚挙することができるから，P の元 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ を

(1) $p \geq p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots$,

(2) すべての $i \in \omega$ に対し，$p_i \in D_i$

の“宇宙”）で行われていることに注意する．

7) $\langle P, \leq \rangle$ が擬順序であるとは，$\leq$ が推移的関係で，$p \leq p$ がすべての $p \in P$ に対し成り立つことである．

8) $r \leq p, q$ となる r が存在するとき，p と q は共存可能であるという．またこのような r が存在しないときには，p と q は共存不可能であるという．

となるように帰納的にとることができる — (2) は 各 D_i が稠密であることから可能である．このとき

$$G = \{q \in P : \text{ある } i \in \omega \text{ に対し } p_i \leq q\}$$

とすれば，G は p を含む P 上の M-generic フィルターとなる．

(証明終わり)

上の証明では，$D_i \subseteq P$ で，$P \in M$ により M の推移性から $P \subseteq M$ となるから，各 p_i は M の元であるが，枚挙 $\langle D_i : i \in \omega \rangle$ は一般には M の中にとれないため（M は P の稠密部分集合が不可算個あると “思っている” かもしれない！），これを用いた $p_0, p_1, p_2, \ldots$ の帰納的構成も一般には M の外側で行われている．したがって，G が M の元であることは保証できない．実は次が成り立つ：

補題 4.13　すべての $p \in P$ に対し，$p_0, p_1 \leq p$ で共存不可能なものがとれるとする．このとき，P 上の M-generic フィルターはすべて M の元でない．

M-generic フィルター G が M の元だったとして矛盾を示す．このときには，$D = P \setminus G$ とすると，M が ZFC のモデルであることから，D も M の元である．さらに，

Claim 4.13.1　D は P で稠密である．

$\vdash$　$p \in P$ をとると，仮定から，$p_0, p_1 \leq p$ で互いに共存不可能なものが存在する．もし p_0 も p_1 も D の元でないとすると，両方とも G の元となるが，これは，G が (4.18) を満たすことに矛盾である．　$\dashv$

したがって，(4.19) により $D \cap G \neq \emptyset$ とならなくてはならないが，D の定義から，これは不可能である．　(証明終わり)

上のような M, P, G に対し，ZFC の可算で推移的なモデル N で，次を満たすものが構成できる[9]：

9)　ここでの，“ZFC の可算で推移的なモデル N” は厳密には，“ZFC' を含む ZFC

(4.20) $M \subseteq N$ で $G \in N$,

(4.21) M の順序数の全体は N の順序数の全体と一致する,

(4.22) N は (4.20) と (4.21) を満たす ZFC の可算推移的モデルのうち $\subseteq$ に関し最小のものである.

(4.22) により，上のような N は一意に決まるので，これを $M[G]$ と書き，M の G による P 上の generic 拡大とよぶ[10].

ここで決定的なのは，N の性質がすでに M の中で（かなりの程度まで）記述できる，ということである：

(4.23) $M[G]$ の各元の名称，あるいは P-名称を G に依存しない形で定義できる．つまり，P-名称の全体 $M^P \subseteq M$ が（P をパラメタとして）M で定義可能なクラスとして導入でき，P 上の M-generic フィルター G を決めると，各 $\dot{x} \in M^P$ に対し，$\dot{x}$ の G による解釈 $\dot{x}^G$ が，$M[G] = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^P\}$ となるように（M の外で各 G に対し一様に）定義でき，M の各元 x については，その標準的名称 $\check{x} \in M^P$ が，すべての G に対し $\check{x}^G = x$ となるよう定義できる.

$\check{x}$ は，混乱の生じる恐れのない場合には x と同一視して，x で表わすことも多い.

さらに，$p \in P$ と，集合論での命題を表わす論理式 φ および $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ を，“p を含むすべての P 上の M-generic フィルター G に対し，$\varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ が $M[G]$ で成り立つ” ことと定義すると，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ 一つ一つに対し

(4.24) p と $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ を変数とする関係，“$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” は M で定義可能である.

の十分に大きな部分集合 ZFC'' の可算で推移的なモデル N” とするべきものである．ただし，ZFC'' を具体的に特定するためには，強制法の構成法の細部を子細に分析しなくてはならなくなるため，ここでは割愛せざるを得ない.

10) ここでの generic フィルターや generic 拡大という用語は，それぞれ，ジェネリック・フィルター，汎用フィルター，また，ジェネリック拡大，強制拡大などと翻訳されることもある.

1_P を P の最大元とするとき，すべての P 上の M-generic フィルターは 1_P を含むから，$M \models$ “$1_P \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” なら $M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ がすべての P 上の generic 拡大で成り立つ．“$1_P \Vdash_P \cdots$” を “$\Vdash_P \cdots$” とも書く．

$\dot{G}^G = G$ がすべての P 上の M-generic フィルター G に対し成り立つような，標準的な名称 $\dot{G}$ も構成できる．これに対しては，次の同値が成り立つ：

(4.25) すべての $p, q \in P$ に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P q \in \dot{G}$” $\Leftrightarrow$ すべての $r \leq p$ に対し，$s \leq r$ で $s \leq q$ となるものが存在する[11)]．

次の性質も重要である：

(4.26) P 上の M-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G)$ なら，$p \in G$ で，$M \models$ “$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” となるものが存在する．

次の補題は，この性質から直ちに導ける：

補題 4.14 (1) すべての $p \in P$, 論理式 $\varphi, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$q \leq p$ で $M \models$ “$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” または，$M \models$ “$q \Vdash_P \neg\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” となるものが存在する．

(2) すべての $p \in P$, 論理式 φ, $\dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P \exists x \varphi(x, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$” なら，$q \leq p$ と $\dot{x}_1 \in M^P$ で，$M \models$ “$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$” となるものが存在する．

(3) すべての $p \in P$ と $X \in M$ と P-名称 $\dot{x}$ に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P \dot{x} \in X$” なら，$q \leq p$ と $x \in X$ で，$M \models$ “$q \Vdash_P \dot{x} = x$” となるものが存在する．

強制概念 P が c.c.c. を満たすとは，不可算な $X \subseteq P$ は常に共存可能な異なる 2 元を持つことである．c.c.c. を満たす強制概念は 強制法の理論で非常に重要な役割をはたすが，次の補題はその理由の一端を示している．

11) P が分離的なとき，つまりすべての $p, q \in P$ について $p \leq q$ でないなら $r < p$ で q と共存不可能なものが存在するときには，さらに，すべての $p, q \in P$ について，$M \models$ “$p \Vdash_P q \in \dot{G}$” $\Leftrightarrow p \leq q$ が成り立つ．

補題 4.15 $P \in M$ を M での強制概念で $M \models$ “P は c.c.c. を満たす” となるものとする．このとき任意の P 上の M-generic フィルター G に対して，κ が M での基数なら，κ は $M[G]$ でも基数となる[12)]．

証明 まず，M での $\aleph_1$（これを $(\aleph_1)^M$ と書くことにする）が $M[G]$ でも $\aleph_1$ になっていることを示すことにする．$(\aleph_1)^M$ が $M[G]$ で基数になっていないとすると，ω から，$(\aleph_1)^M$ への上射 $f \in M[G]$ が存在する．$\dot{f}$ を f の P-名称とする（つまり，$\dot{f}$ を $f = \dot{f}^G$ となるようなものとする）．このとき $p_0 \in G$ で $p_0 \Vdash_P$ “$\dot{f}$ は ω から $(\aleph_1)^M$ への関数である” となるものがとれる．

以下は M の中で議論する：補題 4.14 (2), (3) により，すべての $n \in \omega$ に対し $D_n \subseteq P$ で次を満たすものが存在する：

(4.27) すべての $p \in D_n$ に対し，p は p_0 と共存不可能であるか，あるいは，$k_p \in \omega$ で，$p \Vdash_P$ “$\dot{f}(n) = k_p$” となるものが存在する；

(4.28) D_n の異なる元は，互いに共存不可能である；

(4.29) D_n は (4.27), (4.28) を満たすもののうちで $\subseteq$ に関し最大である．

このとき，D_n は (4.28) と P が c.c.c. を満たすことから可算である．したがって： また,

(4.30) $E_n = \{k_p : p \in D_n\}$ も可算となる．

D_n の極大性から，$\{p \in P :$ ある $q \in D_n$ に対し $p \leq q\}$ は P の稠密な部分集合となることがわかる．このことから,

(4.31) $f(n) = \dot{f}^G(n) \in E_n$ である．

D_n も E_n も M で（一様に）定義可能だから（M が ZFC を満たすことから），$\{D_n : n \in \omega\}$, $\{E_n : n \in \omega\} \in M$ である．したがって，$E = \bigcup\{E_n : n \in \omega\}$ も M の可算な元となる．とくに $E \subsetneq (\aleph_1)^M$ となる

12) このようなとき P は基数 κ を保存するという．

が，(4.31) により，$f''\omega \subseteq E$ である．しかし，これは f が $(\aleph_1)^M$ への上射であることに矛盾である．

一般には，$(\aleph_1)^M$ 以外のすべての M での正則基数 κ に対しても $(\aleph_1)^M$ の場合とほとんど同一の議論により κ が $M[G]$ の基数になることが証明できる．このことと，特異基数は正則基数の極限になっており，基数の極限は常に基数となることから，κ が M での特異基数である場合も κ の基数性は $M[G]$ で保存されることがわかる．　(証明終わり)

コーエンが連続体仮説の独立性を証明したときに用いた強制概念 $Fn(X,2)$ は c.c.c. を満たす強制概念の典型的な例の１つとなっている．X と Y を集合とするとき，

(4.32)　$Fn(X,Y) = \{f : f$ は X の有限部分集合から Y への関数 $\}$

として，

(4.33)　$f, g \in Fn(X,Y)$ に対し，$f \leq g \;\Leftrightarrow\; f$ は g の拡張である

と定義する．このとき，Δ-補題と呼ばれる組合せ論的な道具を用いると，

定理 4.16　可算な Y に対し，$(Fn(X,Y),\leq)$ は c.c.c. を満たす．

が証明できる．

とくに M で $X = \aleph_2 \times \omega$ で[13]，$Y = 2$ としたとき $P = (Fn(X,Y),\leq)$ 上の M-generic な G をとると，generic 性により，$g = \bigcup G$ は $\aleph_2^M \times \omega$ から 2 への写像となり，各 $\alpha \in (\aleph_2)^M$ に対し，$g_\alpha : \omega \to \omega; n \mapsto g(\alpha,n)$ とすると，generic 性から g_α, $\alpha \in (\aleph_2)^M$ は互いに異なる関数となる．したがって，補題 4.15 により，$M[G]$ では "$2^{\aleph_0} \geq (\aleph_2)^M = \aleph_2$" つまり $\neg CH$ が成り立つことがわかる．同様に $cf(\kappa) > \omega$ となる M の基数 κ から出発すると，$2^{\aleph_0} = \kappa$ のモデルが得られる．

このことを p.111 の議論と組み合せると，以下の定理の証明が得られたことになる：

13)　つまり，$X = (\aleph_2)^M \times \omega$ である

定理 4.17 ([Cohen 1963, 1964])　ZFC が矛盾しないなら，ZFC + ¬CH も矛盾しない.（とくに，たとえば，ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{1954}$ も矛盾しない.）

上の定理の命題は，ZF で L をとり，この中で議論することにより，

> ZF が矛盾しないなら，ZFC + ¬CH も矛盾しない.（とくに，たとえば，ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{2007}$ も矛盾しない.）

に改良することもできる.

定理 4.17 は，$P = (Fn(\kappa \times \omega, 2), \leq)$ として，P 上 M-generic な G に対し，$M[G] = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^P\}$ が $\neg CH$ のモデルになることから示せたのだったが，ここでの M^P の部分集合 S をうまく選び $N = \{\dot{x}^G : s \in S\}$ をとることにより，ZF + $\neg AC$ のモデル $N \subseteq M[G]$ を構成できる．このことから，

定理 4.18 ([Cohen 1963, 1964])　ZF が矛盾しないなら，ZF + ¬AC も矛盾しない.

が示せる．一方，不可算な基数 κ に対する 2^κ の値に関しては，定理 4.17 の証明で用いた $P = Fn(\kappa \times \omega, 2)$ を変形して，

$$Fn(X, Y, \lambda) = \{f : f \text{ は } X \text{ の濃度 } \lambda \text{未満の有限部分集合から } Y \text{ への関数}\} \tag{4.34}$$

に (4.33) で順序を入れたものを考える．このような強制概念が基数を保存することは一般には保証できないが，λ が（不可算な）正則基数で，M が λ 未満の基数で GCH を満たすなら，任意の κ に対し，P として $Fn(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$ を（M で）とると，M の基数はすべて保存される．また定理 4.17 の前での議論と同様に，$Fn(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$ は λ から 2 への互いに異なる κ 個の関数を付け加えることがわかる．一方，上のような P は濃度が λ 未満の集合を 1 つも付け加えないことは容易に示せる．したがって，たとえば $V = L$ から出発して 定理 4.17 でと同様に議論することで，

定理 4.19 ([Cohen 1963, 1964])　ZF が矛盾しないなら，ZFC + CH + ¬GCH も矛盾しない.

が証明できる．また，上のような強制概念による拡張を有限回繰り返すことで，たとえば，$2^{\aleph_0} = \aleph_{1906} + 2^{\aleph_1} = \aleph_{1978} + 2^{\aleph_2} = \aleph_{2007}$ が ZFC と無矛盾であることも証明できる[14)]．

イーストンは [Easton 1970] で，上のような繰り返しを “真のクラス回” 行なう方法を確立して，正則基数に対する初等的な基数算術と矛盾しないような，各正則基数 κ に対する 2^κ の付値は，すべて可能であることを示した．これに対し，特異基数 λ に対する 2^λ の値に関する状況は非常に複雑であることが判ってきており，このことは特異基数問題とよばれている．これについては本書第 II 部の第 4 章も参照されたい．

14)　より具体的には，ZFC + GCH のモデルを，$2^{\aleph_2} = \aleph_{2007}$ が成り立つよう $Fn(\omega_{2007} \times \omega_2, 2, \omega_2)$ によって $M[G_2]$ に拡張し，$M[G_2]$ の中で $Fn(\omega_{1978} \times \omega_1, 2, \omega_1)$ をとり，これを使って $M[G_2]$ を $M[G_2][G_1]$ に拡張し，最後に $Fn(\aleph_{1906} \times \omega, 2)$ で $M[G_2][G_1]$ を $M[G_2][G_1][G_0]$ に拡張すれば，このモデルが求めるようなものになっている．

参考文献

[Aigner and Ziegler 1998] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag (1998).

[Bartoszyński and Judah 1995] Tomek Bartoszyński and Heim Judah, *Set theory — On the structure of the real line*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, (1995).

[Bernays 1937] Paul Bernays, *A system of axiomatic set theory, Part I*, Journal of Symbolic Logic, Vol.2, 65-77 (1937).

[Brendle et al 200?] J. Brendle, P. Larson and S. Todorcevic, *Rectangular axioms, perfect set properties, and decompositions*, preprint.

[Ciesielski 1997] K. Ciesielski, *Set Theoretic Real Analysis*, Journal of Applied Analysis, 3(2), 143–190 (1997).

[Cohen 1963] P. Cohen, *The independence of the Continuum Hypothesis I*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. 50, 1143-1148 (1963).

[Cohen 1964] _______, *The independence of the Continuum Hypothesis II*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. 51, 105-110 (1964).

[Devlin 1984] Keith J. Devlin, *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic. Berlin, Springer-Verlag (1984).

[Easton 1970] William B. Easton, *Powers of regular cardinals*, Annals of Mathematical Logic Vol.1, 139-178 (1970).

[Erdős 1964] P. Erdős, *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, Michigan Math. J., 11, 9–10 (1964).

[Feferman et al 1995] S. Feferman, J.W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, R. Solovay, eds., *Kurt Gödel, Collected Works, Volume III, Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press, (1995).

[渕野 2000] 渕野 昌, **ヒルベルト *23* の問題・第 *1* 問題 — 連続体仮説**. in: ***20* 世紀の予想，現代数学の軌跡**. 日本評論社編, 日本評論社 (2000).

[渕野 2004] _______, *Forcing Axioms* **と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から** —, 数学, Vol.56, No.3, 248-259 (2004).

[Friedman 1971] Harvey M. Friedman, *Higher set theory and mathematical practice*, Annals of Mathematical Logic, Vol.2, 325-357 (1971).

[Gödel 1930] Kurt Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol.37, 349-360 (1930).

[Gödel 1931] *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol.38, 173-198 (1931).

[Gödel 1938] _______, *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. Vol.24, 556-557 (1938).

[Gödel 1940] _______, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Annals of Mathematics Studies #3, Princeton University Press (1940).

[Gödel 1947/64] _______, *What is Cantor's Continuum Problem?* American Mathematical Monthly Vol.54, 515-525 (1947). Errata Vol.55, 151 (1948). Revised and expanded version in: Benacerraf, Paul, and Hilary Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 258-273 (1964).

[Gödel 1970] _______, *Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is* $\aleph_2$, in [Feferman et al 1995], 420-422.

[Holz et al 1999] Michael Holz, Karsten Steffens and Edmund Weitz, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhauser (1999).

[Jech 1978/2003] Thomas J. Jech, *Set Theory The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer-Verlag (2003).

[Kanamori 1994/2003] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Second Edition, Springer-Verlag (2003), 日本語訳:「巨大基数の集合論」, 渕野 昌 訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[Kanamori 1996] _______, *Set Theory from Cantor to Cohen*, Bulletin of Symbolic Logic, 2, 1-71 (1996).

[Koppelberg 1995] abine Koppbelberg *Einführung in die Logik und Mengenlehre*, lecture note, Freie Universität Berlin, 1995.

[Kunen 1980] Kenneth Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland (1980).

[MacLane 1971] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (1971).

[Shelah 1994] Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford (1994).

[Shoenfield 1971] Joseph R. Shoenfield, *Unramified forcing*, in: Dana S. Scott ed., *Axiomatic Set Theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 13, part 1. Providence, American Mathematical Society (1971).

[Sierpiński 1920] Wacław Sierpiński, *Sur les rapports entre l'existence des intégrales* $\int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_0^1 f(x,y)dy$ *et* $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, Fund. Math. 1, 142–147 (1920). Reprinted in *Oeuvres Choisies*, vol. II, 341–345.

[Sierpiński 1934] _______, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, Tom IV, Warsaw, (1934).

[Skolem 1923] Thoralf Skolem, *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, in: *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen*, Redogörelse Helsinki, Akademiska-Bokhandeln, 217-232 (1923).

[Solovay ∞] Robert Solovay, *The consistency strength of NFUB*, preprint. `http://math.berkeley.edu/~solovay/Preprints/NFUB.tex.gz`

[Takeuti and Zaring 1971] G. Takeuti and W.M. Zaring, *Introduction to Axiomatic Set-Theory*, Springer-Verlag (1971).

[竹内 1998] 竹内外史, **ゲーデル（新版）**, 日本評論社 (1998).

[田中 (一) 1990] 田中 一之, **‘逆・数学’と２階算術の証明論**, 数学 35(4), 244-260 (1990).

[田中（一） 1997] 田中 一之, **逆数学と２階算術**, 数学基礎論シリーズ 4 巻, 河合文化教育研究所 (1997).

[田中（尚）1982] **公理的集合論**, 培風館 (1982).

[田中（尚） 1987/1999] 田中 尚夫, **選択公理と数学 — 発生と論争，そして確立への道**, 増補版, 遊星社 (1987/1999).

索 引