数学の考え方

2007年 秋学期 第3/4回目の講義
(2019年04月19日　12:17版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

前回: 記号と式

今回: 厳密な論証 — 証明

数学では，主張されるすべての命題は厳密に証明される.

このことは，次と似ているが全く同じではないことに注意:

— 多くの科学（特に自然科学）では，理論の正しさを，実験や実証によって検証する.

— コンピュータ・プログラムが正しく動作することを検証するのによく使われる方法として，極端なデータを入力して想定した動作をするかどうかを確かめるやり方がある.

間違った(不完全な)証明の例

命題. すべての実数 x に対し, $x^2 - 2x + 2 \geq 1$ が成り立つ.

証明. 不等式の左辺 $x = 1$ を代入すると, $1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ だから不等式は成り立つ.

$x = 2$ を代入すると, $2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$ だから不等式は成り立つ.

$x = 3$ を代入すると $3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$ だから不等式は成り立つ. ...

したがって命題は成り立つ. □

何が間違っているか?

間違った（不完全な）証明の例（その2）

命題． すべての自然数 n（$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$）に対し，$2^{2^n} + 1$ は素数である．

証明． $2^{2^n} + 1$ の n に 0 を代入すると，$2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ だからこれは素数である．

1 を代入すると， $2^{2^1} + 1 = 5$ だが，これも素数である．

2 を代入すると， $2^{2^2} + 1 = 17$ だが，これも素数である．

3 を代入すると，$2^{2^3} + 1 = 257$ だが，これも素数である． $\ldots$

したがって，すべての自然数 n（$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$）に対し，$2^{2^n} + 1$ は素数である． $\square$

実は上の命題は正しくない．$2^{2^n}+1$ の n に 5 を代入すると，4294967297 となるが，$4294967297 = 641 \times 6700417$ なので，これは素数ではない!!

Digression（寄り道，脱線）: 数学は難しい?

（特に日本人 — または東アジア人 — が）数学が難しいと思いがちな理由（と思われるもの）:

1. 数学の記号はヨーロッパの言語からきていることが多い.

2. 「証明」や「定義」という概念は日本（東アジア）のもともとの文化に存在しない (?)

3. 絶対的な真理という概念も日本（東アジア）のもともとの文化に存在しない (?)

しかし西洋人も同じように数学が難しいと思う人が多い

考えるのが嫌いな人はどの文化圏にも同じくらいの割合いる?

皆さんが今習っている“数学”は面倒くさいかもしれないけれど，ぜんぜん難しくはない!!!

本当に難しい数学は，皆さんはまだ習ったことがなくて，これは本当に難しい!!!

本当に難しい数学でも，一生懸命に勉強すれば，誰でも理解することはできる（はず）である．

ただし，数学の新しい理論を発明するのには才能が必要で誰にでもできるわけではない．

しかし新しい理論の発明を追体験することは誰でもできるはず．

証明の例

定理 $x \in \mathbb{R}$ が，条件 $(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

証明 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．

定理は，

> $x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

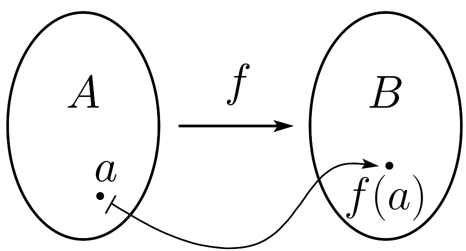
と言いなおすことができる．

関数についての補足（再）

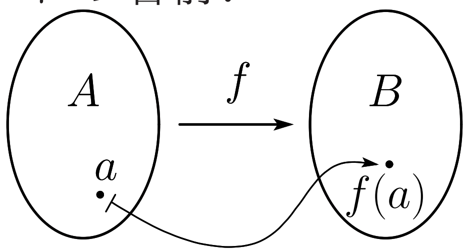
A と B を集合とするとき f が A から B への関数 とは，f が A の一つ一つの要素に対して，B の要素を対応づける“規則” となっていること．

このことを $f : A \to B$ とあらわす．

ただし，関数 f の対応規則は明示的に与えられているとは限らないし，与えられているとしても式で表せるとも限らない．



A の要素 a が f によって対応づけられる B の要素を $f(a)$ とあらわす. f が A から B への関数である，ということを記号 $f : A \rightarrow B$ であらわす. $f(a)$ を a を f の a を入れるスロット $f(\cdot)$ に入れた結果と見て f が関数であることを強調するために $f(x)$ という書き方をする. x は a を入れるためのスロットの名前.



証明 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．
定理は，

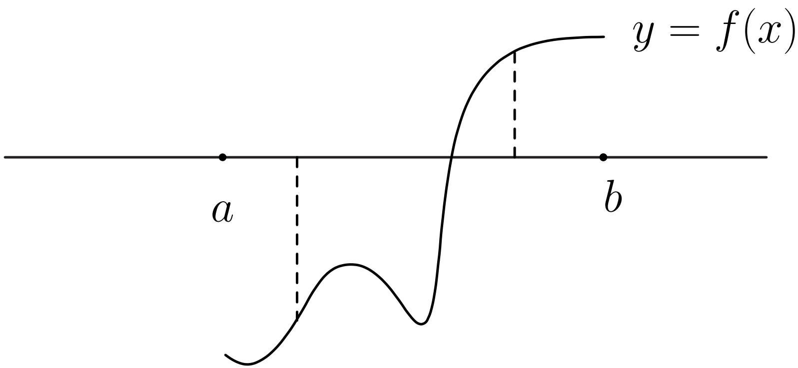
$x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

と言いなおすことができる．

解説: "$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$" とは，すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し，この式に a を代入して得られる $(a+7)(a+5)(a-1)a$ を対応させるような関数のこと．たとえば，1 に対してこの関数の返す値 $f(1)$ は，$(1+7) \times (1+5) \times (1-1) \times 1 = 0$ である．

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -7, x = -5, x = 0, x = 1$ のどれかが成り立つときだから，区間 $(-\infty, -7), (-7, -5), (-5, 0), (0, 1), (1, \infty)$ の各々の中では $f(x)$ の値はプラスマイナスは一定である．

もし，これらの区間 (a,b) の中で $f(x)$ がプラスの値もマイナスの値もとったとすると，$f(x)$ は連続だから[(*)]，区間 (a,b) でこのプラスの値からマイナスの値のところへ変数 x が動くとき，$y=f(x)$ のグラフはどこかで x-軸を横切る．つまり (a,b) の中で $f(x)=0$ となる点が存在しなくてはならないが，区間 $(-\infty,-7)$, $(-7,-5)$, $(-5,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$ の中に $f(x)=0$ となるような点は存在しないので，このようなことはありえない．



(∗) 前回の最初に，多項式で定義された関数は連続である，という内容の定理を引用した．

証明 関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．定理は，

$x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

と言いなおすことができる．

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -7, x = -5, x = 0, x = 1$ のどれかが成り立つときだから，区間 $(-\infty, -7)$, $(-7, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ の各々の中では $f(x)$ の値はプラスマイナスは一定である．

これらの区間おのおのから点を1つづつとる．たとえば，$-8, -6, -4, 0.5, 2$ をとる（抜き取り検査）．このとき $f(-8) = 216$, $f(-6) = -42$, $f(-4) = 60$, $f(0.5) = -10.3125$, $f(2) = 126$ だから，$f(x) < 0$ の成り立つ x はちょうど区間 $(-7, -5)$ と $(0, 1)$ の要素となることがわかる．したがって定理が証明された． $\square$