数学の考え方

2007年 秋学期 第5回目の講義
(2019年04月19日 12:19版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

厳密な論証 — 証明の続き

数学では，主張されるすべての命題は厳密に証明される．

厳密な論証の必要性

— 数学は科学全体の土台になっているので，ここであやふやな議論がされたり，実は正しくない議論がされたりしていないことを十二分にチェックする必要がある．

— 直観だけでは遠くまで行けない．厳密な議論の積み重ねで，直観的な把握では不可能な複雑な理論の構築が可能になる．

— 直観的に正しいと思っても実はそれが正しくないことが厳密な論証で確かめられる場合もある．

出来上がった数学を応用するだけなら証明などなくていいのではないか?

— 数学の定理のより深い意味は実は，証明の中に表現されていることが多い．

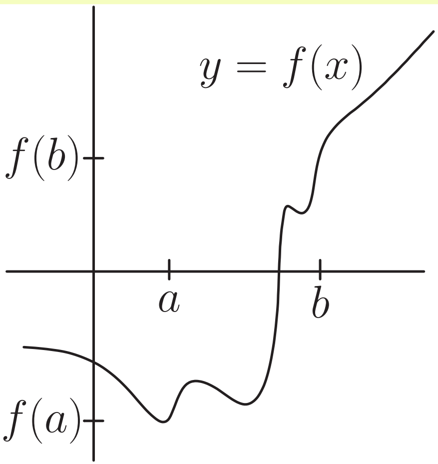
— 数学の定理で出てくる条件がどこで必要となっているかを見極めるには証明を吟味してみることが必要である．

— 数学の応用では，知られた結果を応用できる形に変形したり，改良したりする必要が頻繁におきるが，数学の結果の証明を追えていないと，そのようなことは不可能である．

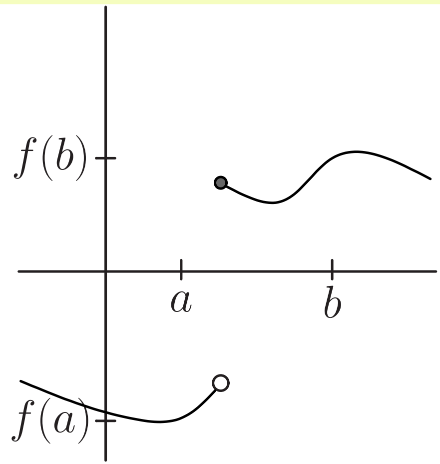
— 証明からアルゴリズム（計算法）が抽出できることも多い．

前回の定理の証明のアイデアの核：

$f(x)$ を連続な関数で，$a<b$ で $f(a)<0,\ f(b)>0$ とする．このとき，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ となるような解 x を少なくとも1つは持つ．



「$f(x)$ が連続」という条件は必要:



定理（中間値の定理） $f(x)$ を連続な関数として，$a, b\ (a < b)$ を区間 $[a, b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれるような2点とする．このとき，$f(a)$, $f(b) \neq 0$ で $f(a)$ と $f(b)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a < c < b$ で $f(c) = 0$ を満たすものが存在する．

証明 たとえば $f(a) < 0 < f(b)$ とする．$a_0 = a, b_0 = b$ とする．a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(c_0) = 0$ なら，これが求めるもの．そうでなければ，$f(a_0)$ と $f(c_0)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a_1 = a_0, b_1 = c_0$ とする．そうでなければ，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なる．このときには，$a_1 = c_0, b_1 = b_0$ とする．

以下同様の構成を繰り返す. 途中で $f(c_n) = 0$ となる点が見つかって停止しなければ，$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots b_2 \leq b_1 \leq b_0$ となる．$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば，$f(x)$ の連続性から，$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ となるから，この c が求めるもの． □

連続関数 $f(x)$ に対する方程式 $f(x)=0$ の数値解法

(1) $f(a_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なるような $a_0 < b_0$ をみつける.

(2) a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる. $f(a_0)$ と $f(c_0)$ の符号が異なるか, $f(c_0)$ と $f(b_0)$ の符号が異なるかのどちらかである. 前者なら $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ とし, 後者なら, $a_1 = c_0, b_1 = b_0$ とする.

(3) a_1 と b_1 の中間点 c_1 をとり, (2) と同様に議論して a_2, b_2 を得る. 以下同様に $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ ととってゆく.

このとき a_n（あるいは b_n）は, 誤差 $b_n - a_n$ 以内での $f(c)=0$ を満たすような c の数値解となっている.

中間値の定理の証明の問題点

「$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば,」と言ったが，このような c は存在するのか?

実数体（連続体）の完備性: 上のような c は常に存在する.

この性質を実数体（実数の全体の集合）の基本性質として仮定する.

数学の議論も何か基本的な前提の上に組み立てなくてはならない. この基本的な前提のことを 公理 (axiom) とよぶ. 上の「実数体の完備性」も数学の「公理」の1つである.

実数体: real numbers,　連続体: continuum,

実数体（連続体）の完備性: $a_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ が実数の上昇列で，上限を持つ（つまり，ある実数 a があって $a_n \le a$ がすべての n に対し成り立つ）とき，$a_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ の極限（つまり $a_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ のどんどん近づいてゆく先になっている実数）$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．

上の公理を仮定すると，実数の下降列についても似たような性質が成り立つことが示せる

定理． $b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ が実数の<u>下降列</u>で，<u>下限</u>を持つ（つまり，ある実数 b があって $b \le b_n$ がすべての n に対し成り立つ）とき，$b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ の極限（つまり $b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ のどんどん近づいてゆく先になっている実数）$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．

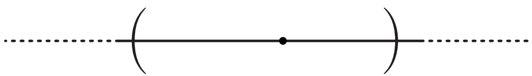
定理． $b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が実数の下降列で，下限を持つ（つまり，ある実数 b があって $b \leq b_n$ がすべての n に対し成り立つ）とき，$b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の極限（つまり $b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ のどんどん近づいてゆく先になっている実数）$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．

証明． $b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の下限の1つを b とする（つまり，b を $b \leq b_n$ がすべての n に対し成り立つような実数とする）．このとき $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $a_n = -b_n$ として，$a = -b$ とする．このとき，$a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は実数の上昇列で，a は $a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の上限になっている．したがって，実数体の連続性から，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するが，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty} -b_n = -\lim_{n\to\infty} a_n$$

となるから，$\lim_{n\to\infty} b_n$ も存在することがわかる． ❑

有理数（分数として表せる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体 $\mathbb{R}$ の中にぎっしりとつまって埋めこまれている:



どんな実数の区間をとっても，その中に有理数がとれる．

しかし，$\mathbb{Q}$ は実数体のような完備性を持っていない．

例． b_n を π の小数点以下 n 桁までの値とする．
$b_1 = 3.1, b_2 = 3.14, b_3 = 3.141, b_4 = 3.1415 \cdots$ である．
$b_n \in \mathbb{Q}$ である（たとえば b_4 は $3.1415 = 31415/10000$ と分数であらわせる）．たとえば $b_n \leq 4$ だから，数列 b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は上限を持つ．ところが，$\lim_{n\to\infty} b_n = \pi$ だから，この極限は $\mathbb{Q}$ の中にない．特に $\mathbb{Q}$ で考えたときには，この数列の極限は存在しない!!!