数学の考え方

2007年 秋学期 第6回目の講義
(2019年04月19日 12:21版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

前回の講義の復習と補足

定理（中間値の定理） $f(x)$ を連続な関数として，a, b $(a < b)$ を区間 $[a, b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれるような2点とする．このとき，$f(a)$, $f(b) \neq 0$ で $f(a)$ と $f(b)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a < c < b$ で $f(c) = 0$ を満たすものが存在する．

関数 $f(x)$ が連続とは，$f(x)$ の定義域の各点 a で，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つこと．

定理（中間値の定理） $f(x)$ を連続な関数として，$a, b\ (a < b)$ を区間 $[a, b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれるような2点とする．このとき，$f(a)$, $f(b) \neq 0$ で $f(a)$ と $f(b)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a < c < b$ で $f(c) = 0$ を満たすものが存在する．

証明 たとえば $f(a) < 0 < f(b)$ とする．$a_0 = a, b_0 = b$ とする．a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(c_0) = 0$ なら，これが求めるもの．そうでなければ，$f(a_0)$ と $f(c_0)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a_1 = a_0, b_1 = c_0$ とする．そうでなければ，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なる．このときには，$a_1 = c_0, b_1 = b_0$ とする．

同様の構成を繰り返す．この構成が途中で（$f(c_n) = 0$ となる点が見つかってストップしなければ）$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots b_2 \le b_1 \le b_0$ となる．$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば，$f(x)$ の連続性により $0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ となり，この c が求めるもの．

この証明から，連続関数 $f(x)$ に対する方程式 $f(x)=0$ の数値解法のアルゴリズム抽出できる:

(1) $f(a_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なるような $a_0<b_0$ をみつける.

(2) a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる. $f(a_0)$ と $f(c_0)$ の符号が異なるか, $f(c_0)$ と $f(b_0)$ の符号が異なるかのどちらかである. 前者なら $a_1=a_0$, $b_1=c_0$ とし, 後者なら, $a_1=c_0$, $b_1=b_0$ とする.

(3) a_1 と b_1 の中間点 c_1 をとり, (2) と同様に議論して a_2, b_2 を得る. 以下同様に $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ ととってゆく.

このとき（十分に大きな n に対し） c_n は, 誤差 b_n-a_n 以内での $f(c)=0$ を満たすような c の数値解となっている.

アルゴリズムの実装

$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ の数値解を求めるCプログラムの作成

```
#define LEFT 2.1
#define RIGHT 3.0
#define N 20  /* 精度 */
extern double f(double x);
main()
{
  double a,b,c, fa, fb, fc;
  int i;
  a=LEFT; b=RIGHT;
  for(i=0;i<N;i++)
    {
      c=(a+b)/2.0;
      if (f(a)*f(c)<0.0)
        b=c;
      else
        a=c;
    }
  printf("%f と %f の間にある方程式の数値解（の1
つ）は x = %lf です\n", LEFT, RIGHT, c);
  printf("計算の誤差は ± %lf 未満です\n", pow(2,-N)*(RIGHT-LEFT));
}
```

```
double f (x)
     double x;
{ return (x*x*x-4*x*x+3*x+2);
}
```

アルゴリズムの実装

$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ の数値解を求めるCプログラムの作成

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ とすると，$f(2.1) = -0.079$, $f(3.0) = 2.0$ となるので，方程式 $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ は 2.1 と 3.0 の間に解を持つことがわかる．

Cプログラムを走らせると

2.100000 と 3.000000 の間にある方程式の数値解（の1つ）は x = 2.414213 です

計算の誤差は ± 0.000001 未満です

という出力が得られた．

Cプログラムを走らせると

2.100000 と 3.000000 の間にある方程式の数値解（の1つ）は x = 2.414213 です

計算の誤差は ± 0.000001 未満です

という出力が得られた.

実は，$x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ は $(x-2)(x^2-2x-1)$ と因数分解できるので，$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ の 2.1 と 3.0 の間の解は $1+\sqrt{2}$ とあらわされる.

$1+\sqrt{2}$ の電卓での計算結果: 2.414213562373095

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}=1$ の数値解を求めるプログラム

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}-1=0$ に注意する.

$f(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}-1$ とすると,
$f(4)=\sqrt{10}-1>0$; $f(30)=-0.0990195135927844\cdots$ となる. これを使って前のプログラムを変更して計算させると…

4.000000 と 30.000000 の間にある方程式の数値解（の1つ）は x = 24.249990 です

計算の誤差は ± 0.000025 未満です

などという結果の出力を得る.

厳密解は 24.25 ではないだろうか?

$$\sqrt{24.25+6}-\sqrt{24.25-4}-1=\sqrt{\frac{121}{4}}-\sqrt{\frac{81}{4}}-1=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}-1=0\ !!$$

$\sin 2x - x = 0$ の数値解を求めるプログラム

$f(x) = \sin 2x - x$ とすると，$f'(x) = 2\cos 2x - 1$ となる．

$f'(\frac{\pi}{6}) = 0$, $f'(-\frac{\pi}{6}) = 0$ である．

$f'(0) = 1 > 0$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}) = -3$

また，$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$.

x		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

中間値の証明から抽出したアルゴリズムの限界

1. $f(a)$ と $f(b)$ の符号の違うような $a < b$ を別途に見つけなければならない.

2. たとえば，$f(x) = x^2$ としたときの $f(x) = 0$ でのように $f(x) = 0$ は解を持つが $f(x)$ の値の符号が常に一定であるような場合には，このアルゴリズムは適用できない.

上の 1. 2. のような問題点を回避できるアルゴリズムとしては $f(x)$ だけでなく $f'(x)$ の値も用いるニュートン法やその様々な改良などが知られている.

中部大学では，数値計算法の専門家としは，工学部 情報工学科の吉田 年雄 先生がいらっしゃいます．