数学の考え方

2007年 秋学期 第7回目の講義
(2019年04月19日　11:32版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

これまでの講義の流れ

数学の特徴としてあげられるキーワードを中心に考察する:

— 記号と式

— 厳密な論証 — 証明

— 証明からのアルゴリズムの抽出

今日のテーマ:　**抽象化と公理的アプローチ**

抽象化 (abstraction)

本質的と思えるものを最小限残して，それ以外の要素をすべて消去する

短所:

— “抽象的” で一見分りづらい

長所:

— 本質が何かが，よりよく見える

— 本質的でないことがらにまぎらわされないため効率的に考えられる

— 抽象化することで，全く別だと思っていたものが実は同じ機構を背後に持っていることが分ることがある

抽象化の例

実数の足し算の基本性質として，つぎの3つの性質に着目する:

(a1) すべての実数 x, y, z に対し $(x+y)+z=x+(y+z)$ が成り立つ．（結合法則）

(a2) ある実数 E があって，どんな実数 x に対しても $x+E=x$ が成り立つ．（単位元の存在）

(a3) 上の (a2) でのような E をとるとき，どんな実数 x に対しても $x+y=E$ となるような実数 y が存在する．（逆元の存在）

（$E=0$　$y=-x$　と見る）

(a4) すべての実数 x, y に対し，$x+y=y+x$ である．（可換性）

(a1)（結合法則）と (a4)（可換性（かかんせい））は，数の計算で頻繁に応用されている．たとえば:

$$3+2+4+5+6+7+5+3$$

という計算をするときに，$\overbrace{(3+2+5)}^{10}+\overbrace{(4+6)}^{10}+\overbrace{(7+3)}^{10}+5=35$ とならべなおしたり組合せなおしたりして暗算してよい

のは，結合法則と可換性を何度か組み合せて使うことで保証されている，と考えることができる．

実数の基本性質 (a1) ˜ (a3) と (a4) に対応する演算の性質から，群（ぐん group）とアーベル群 (abelian group) の概念が抽出される．

集合 G の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の3つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は群であるという:

ただし，集合（しゅうごう）とは，数学的な対象の集まりのことを言う．

(g1) すべての G の要素 x, y, z に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ．（結合法則）

(g2) ある G の要素 E があって，どんな G の要素 x に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ． (単位元の存在)

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな G の要素 x に対しても $x \circ y = E$ となる G の要素 y が存在する．（逆元の存在）

$(G, \circ)$ がさらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ はアーベル群 (abelian group) であるという

(g4) すべての G の要素 x, y に対し，$x \circ y = y \circ x$ である．（可換性）

上のような E を $(G, \circ)$ の 単位元 といい，(g3) での y を x の（$(G, \circ)$ での）逆元（ぎゃくげん）という.

アーベル (Niels Henrik Abel 1802 - 1829)
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Abel.html

群の例

(1) $\mathbb{R}$ で実数の全体をあらわすことにするとき，$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である．　単位元: 0,　x の逆元: $-x$

(2) $\mathbb{R}^{\times}$ で 0 以外の実数の全体をあらわすことにするとき，$(\mathbb{R}^{\times}, \times)$ はアーベル群である．問題: ここでの単位元と逆元は何か？

(3) $\mathbb{R}^{+}$ で 0 より大きい実数の全体をあらわすことにするとき，$(\mathbb{R}^{+}, \times)$ もアーベル群である．問題: ここでの単位元と逆元は何か？

(4) ...