# 数学の考え方

2007年 秋学期 第9回目の講義
(2019年04月19日 11:49版)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

## 群（ぐん, group）

ある集合 $G$ の上に演算 $\circ$ が定義されていて，次の3つの性質が成り立つとき，$G$ と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は群（ぐん）であるという:

(g1) すべての $x, y, z \in G$ に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ．
（結合法則）

(g2) $E \in G$ で，どんな $x \in G$ に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つようなものが存在する．(単位元の存在)

(g3) 上の (g2) でのような $E$ をとるとき，どんな $x \in G$ に対しても $x \circ y = E$ となる $y \in G$ が存在する．（逆元の存在）

(g2) でのような $E$ のことを群 $(G, \circ)$ の単位元という.
$x \in G$ に対して (g3) でのような $y$ を $x$ の逆元という.

**定理** 任意の群 $(G, \circ)$ の単位元はただ1つしか存在しない.

すべての $x, y \in G$ に対し, $x \circ y = y \circ x$ が成り立つとき, $(G, \circ)$ はアーベル群である, という.

**定理** $(G, \circ)$ を群として $E$ を $(G, \circ)$ の単位元とする. このとき次が成り立つ:
(1) $y \in G$ を $x \in G$ の逆元とするとき, $y \circ x = E$ が成り立つ.
(2) $y \in G$ を $x \in G$ の逆元とするとき, $x$ は $y$ の逆元である.
(3) $x \in G$ の逆元はただ1つしかない.

# 群の例

(1) $(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である．

$(\mathbb{R}, +)$ の単位元は $0$ で，$x \in \mathbb{R}$ の逆元は $-x$ である．

(2) $\mathbb{R}^\times = \{x : x$ は実数で $x \neq 0\}$ とするとき，$(\mathbb{R}^\times, \times)$ はアーベル群である．

$x, y, z \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

すべての $x \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$x \times 1 = 1 \times x = x$

すべての $x \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$x \times \frac{1}{x} = 1$

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \times y = y \times x$

(3) $\mathbb{R}^+ = \{x : x$ は実数で $x > 0\}$ とするとき，$(\mathbb{R}^\times, \times)$ はアーベル群である．

# アーベル群でないような群の例

平面上の各点を，同じ平面の点に（何かの規則によって）移す対応 $f$ が合同変換であるとは，任意の2点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の距離が，それらの2点の $f$ で移した先の点 $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})$ の距離と等しいこと．特に合同変換では異なる2点の移した先は異なる2点になっている．

$G = \{f : f \text{ は平面上の合同変換}\}$ とする．たとえば $f$ を $x$-軸方向に2平行移動する，という合同変換とすると，$f \in G$ である．

$f\ g \in G$ に対して $f \circ g$ で $f$ と $g$ の関数としての合成をあらわすことにする．平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ に対し $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ である．

上のような $(G, \circ)$ を 平面上の合同変換群 とよぶ

$G = \{f : f$ は平面上の合同変換$\}$ とする．たとえば $f$ を $x$-軸方向に2平行移動する，という合同変換とすると，$f \in G$ である．

$f\ g \in G$ に対して $f \circ g$ で $f$ と $g$ の関数としての合成をあらわすことにする．平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ に対し $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ である．

上のような $(G, \circ)$ を <u>平面上の合同変換群</u> とよぶ

上の $(G, \circ)$ は実際に群になっている:

<u>結合法則</u>: $f, g, h \in G$ のとき，すべての平面上の点 $\mathbf{x}$ に対し

$$((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}) = (f \circ g)(h(\mathbf{x})) = f(g(h(\mathbf{x}))) = f((g \circ h)(\mathbf{x})) = (f \circ (g \circ h))(\mathbf{x})$$

したがって，$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ である．

<u>単位元</u>: 恒等変換 — どの点もその点自身に移す（なにも移さない）

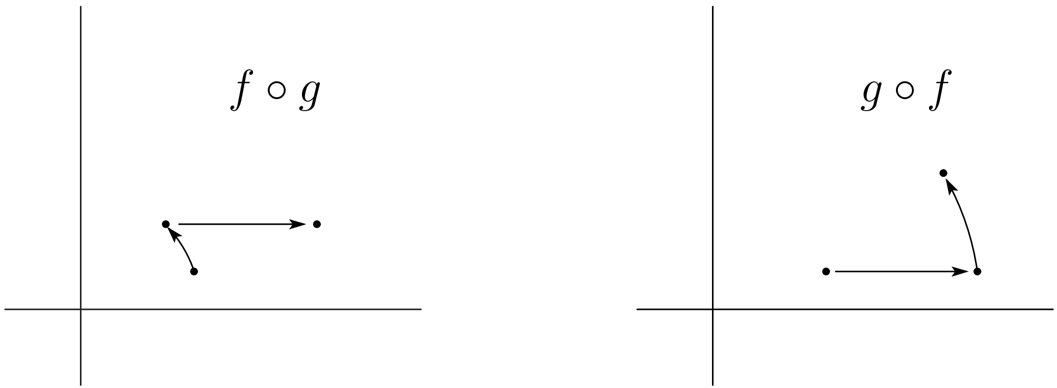
<u>逆元</u>: 逆変換

# 平面上の合同変換群は可換でない

例

$g$: 原点を中心に左回りに 30° 回転させる

$f$: $x$ -軸方向に 3 平行移動する




上の図から分るように $f \circ g \neq g \circ f$ である.

$n$ をある自然数として，$a_1,\ldots,a_n$ を $n$ 個の異なる記号とする．これらの記号のならべかえの全体を $S(n)$ であらわすことにする．

たとえば，$n$ が4のとき，$S(n)$ の要素の一つは

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{array}$$

とあらわせる．

$s, t \in S(n)$ のとき，$s \circ t$ で， $t$ と $s$ を合成して得られる並べかえをあらわすことにする

$n = 4$ の例では，たとえば $s$ と $t$ が

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \end{array}$$

のときには，$s \circ t$ は

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array} \quad \text{と合成して} \quad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array} \quad \text{のこととする．}$$

$(S(n), \circ)$ は群になる．この群を $n$ 次の置換群とよぶ．

$n > 2$ のとき $(S(n), \circ)$ は可換でない．

前ページの $s$ と $t$ を

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{array}$$

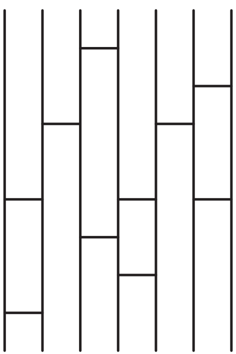
と合成すると

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{array}$$

となり $s \circ t$ と $t \circ s$ は異なる．

# 置換群の応用

ルービック・キューブ



あみだくじ