数学の考え方

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

最終更新日時: **2018 年 04 月 08 日 (13:22)**

以下のテキストは，中部大学で 2006 年度秋学期に中部大学の全学の学生のために開講された「数学の考え方」 — methodology of mathematics — の講義で作成した講義録です．**2007 年度春学期の著者の担当の「数学の考え方」の講義は，このテキストを基に行う予定です．** このテキストのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/chubu/method-math-WS06.pdf`

として閲覧／ダウンロードできます．現在，このテキストの第 1 章はすでに stable version（安定版）になっていると言えますが，後半には，まだ書きかけの部分もあります．2007 年度春学期の学期中の講義と平行して，少しづつ補筆して upload する予定です． 私の「数学の考え方」の講義の受講者は定期的にチェックしてください．テキストのバージョンアップはこのページの初めにある「最終更新日時」で確認できます．

1　数学とは何か

数学とは何か? という設問はあまり建設的とは言えそうにありません．そんなことに答えようとするより，どんどん実際の数学の例を見たり，新しい数学を自分で作っていったりする方がずっと面白いし，それに，せっかく自由な数学を「数学とはこれこれしかじかである」というように限定してしまうのはもったいない気がします．

しかし，数学の他の学問とは異なる特徴をいくつかならべてみることはできるし，そうすることで，「数学の考え方」を整理してみることもできそうです．そこで，まず，数学の特徴といえるものをいくつか述べて，それらの特徴の説明になるような，実際の数学での（できるだけ簡単な）例を見てみることにしたいと思います．

ここで「数学」と言うときには，（本や論文，教科書などに）書かれた数学の結果のことも，我々が数学を考えるときの頭の使い方やそのときの思考のプロセスのことも，数学の結果の様々な応用のことも，全部区別せずひとまとめにして言っています．また，学校で習う数学とは違って，数学者にとっての数学は，出来上がった体系だけでなくて，自分がこれから作り出してゆく新しい数学研究の結果たち，というような意味合いも含まれているわけですが，ここでもそのような意味での数学も含めて考えることにします．

日本語で「数学」というと，「数」+「学」という単語の組成から，数に関する学問，と思う人が多いかもしれません．しかし，数学で問題にするのは，必ずしも数だけではありません．また，数を問題としている場合でも，一つ一つの数や，数の計算などだけが問題になることは稀で，それらの間の関係や数の全体の総体としての構造などを問題にすることが多いのです．ちなみに，ヨーロッパ語で，日本語の「数学」に対応するのは，ギリシャ語の $\mu\ \alpha\ \tau\ \eta\ \mu\ \alpha$ (matema) に由来する言葉で，たとえば英語では mathematics ですが，この “matema” というのは学問とか知識とかいう意味で，数に直接関連する意味を持つ単語ではないということです．

1.1　文字定数，文字変数，記号の積極的な使用

数学というと，「x を任意の ... とする．」(Let x be $\cdots$.) というような言い回しを思い浮かべる人が多いのではないかと思います．文字定数や文字変数を積極的に使うことは数学の一つの大きな特徴の一つです．この場合 “x” はここでこれから話題にすることになる，「任意の ... 」に付けられた仮の名前です．

文字定数としてアルファベットを使う，というのはもちろんヨーロッパの数学で行われていたことで，アルファベットを持たない日本の古来の数学にあった特徴ではありません．実は現在日本で「数学」と呼ばれているものは，もともとは西洋で発達して，主に幕末から明治時代の初めくらいの時期に西洋から日本に導入された学問なのです．しかし，だからと言って，数学を外国製の御仕着せの学問，というように捉える必要はないと思います．日本は中国や朝鮮の文化を継承したように，ヨーロッパの文化も継承したので，西

洋から由来する学問は，我々の学問でもあると考えるべきでしょう．また，近代に数学を発展させたのが主にヨーロッパだった，と言っても，アラビア数字や，アルジェブラ，アルゴリズム（アルというのはアラビア系の言葉の冠詞です）などという数学で使われる用語からも知れるように，ヨーロッパの中世くらいの時代にはアラビア文化圏が数学研究の中心地でした．北ヨーロッパが紀元前に地中海沿岸で発達した数学を継承できたのも，この時代のアラビア文化圏での数学研究のおかげでした．このように数学はもともと非常にインターナショナルな学問であると言うことができそうです．

文字定数に限らず，数学では，記号を積極的に使います．例えば，私が最近書き上げた論文を例にとってみると，この論文のあるページには

$$p^* \Vdash_{\mathbb{Q}^\dagger_{\bar{X}}} \text{``}\forall\langle\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}\rangle \in (\!(\dot{S}_0,\ldots,\dot{S}_{n-1})\!)\ \mathcal{H}(\aleph_1) \models \neg\varphi(\langle\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}\rangle,\dot{a})\text{''}.$$

という記号だけからなる“文”が出てきます．

Let $X \supseteq X_0$ and $Y \supseteq Y_0$ be as in (5.6) of (A) for $X_0 = A_{\alpha_0} \cup \cdots \cup A_{\alpha_{n-1}}$ and $Y_0 = B_{\alpha_0} \cup \cdots \cup B_{\alpha_{n-1}}$.

Let

(5.30) $\tilde{S} = U \setminus \big(\sup(\mathrm{supp}(p^*) \cup \mathrm{supp}_0(p^*) \cup \{\alpha_i : i < n\} \cup X \cup Y) + 1\big)$.

For $i < n$ and $\alpha \in \tilde{S}$, let

(5.31) $p_{i,\alpha} = \Phi_{i,\alpha}\big(p^*\big)$

where $\Phi_{i,\alpha}$ is the automorphism on $\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$ induced from a $\langle \phi, \psi \rangle \in \mathcal{F}$ such that ϕ sends A_{α_i} order isomorphically to A_α, ψ sends B_{α_i} order isomorphically to B_α. For $i < n$, let $\dot{S}_i$ be a $\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$-name such that

(5.32) $\Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}}$ "$\dot{S}_i = \{\alpha \in \tilde{S} : p_{i,\alpha} \in \dot{G}\}$".

Similarly to Lemma 4.5, we have

Claim 5.4.2. *For $i < n$, we have $p^* \Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}}$ "$\dot{S}_i$ is stationary".*

Thus, we are done by the following claim:

Claim 5.4.3.

$p^* \Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}}$ "$\forall \langle \beta_0, ..., \beta_{n-1} \rangle \in (\!(\dot{S}_0, ..., \dot{S}_{n-1})\!)\ \mathcal{H}(\aleph_1) \models \neg\varphi(\langle \beta_0, ..., \beta_{n-1} \rangle, \dot{a})$".

$\vdash$ Suppose otherwise. Then, there would be $q \leq_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}} p^*$ and β_0 ,..., $\beta_{n-1} \in \tilde{S}$ such that

(5.33) $q \Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}}$ "$\langle \beta_0, ..., \beta_{n-1} \rangle \in (\!(\dot{S}_0, ..., \dot{S}_{n-1})\!)\ \wedge\ \mathcal{H}(\aleph_1) \models \varphi(\langle \dot{x}_{\beta_0}, ..., \dot{x}_{\beta_{n-1}} \rangle, \dot{a})$".

Let $\langle \phi, \psi \rangle \in \mathcal{F}$ be such that ϕ sends A_{α_i} order isomorphically to A_{β_i} and ψ sends B_{α_i} order isomorphically to B_{β_i} for all $i < n$ (and vice versa). Let Φ be the automorphism on $\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$ induced by $\langle \phi, \psi \rangle$. Thus Φ sends $\dot{x}_{\alpha_i}$ to $\dot{x}_{\beta_i}$ for $i < n$ by (5.28), (e).

Let $X' = \Phi^{-1}{}'' \mathrm{supp}(q) \setminus X$. By (5.6) in (A), there is $\langle \phi, \psi \rangle \in \mathcal{F}$ such that

(5.34) $\phi \restriction X = id_X$, $\psi \restriction Y = id_Y$; and

(5.35) $\phi'' X' \cap (X \cup X') = \emptyset$.

Let $\Psi : \mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}} \to \mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$ be the automorphism on $\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$ induced from $\langle \phi, \psi \rangle$. By (5.34), we have $\Psi(\dot{x}_{\alpha_i}) = \dot{x}_{\alpha_i}$ for all $i < n$ and $\Psi(\dot{a}) = \dot{a}$. Hence

$$\Psi(p^*) \Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}} \text{“}\mathcal{H}(\aleph_1) \models \neg\varphi(\dot{x}_{\alpha_0}, ..., \dot{x}_{\alpha_{n-1}}, \dot{a})\text{”}.$$

It follows that

$$\Phi(\Psi(p^*)) \Vdash_{\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}} \text{“}\mathcal{H}(\aleph_1) \models \neg\varphi(\dot{x}_{\beta_0}, ..., \dot{x}_{\beta_{n-1}}, \dot{a})\text{”}.$$

But this is a contradiction since q and $\Phi(\Psi(p^*))$ are compatible by (5.35) and Lemma 5.3. $\dashv$ (Claim 5.4.3)

□ (Theorem 5.4)

28

上の式の出てくる論文の原稿のページ

ここに現われる記号には，$\Vdash$, $\models$, $\aleph_1$ などの，数学のある研究分野（この例では集合論）で標準的に使われる，その分野の研究者には説明しなくても分るような意味の固定された記号や，$\mathbb{Q}^{\dagger}_{\bar{X}}$ のように，この論文のこれより前のどこかで定義された対象を表わしていて，この論文の中だけでその意味に使われるような記号，また先程の x の例と同じように，た

とえば“$\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ を $\cdots$ とする”というようにして導入されたものがあります[1)]．数学は記号を使うからむずかしい，と思う人も多いと思いますが，実は，上の例のように，どんどん新しい記号を導入してそれを積極的に使うことで，普通の言葉では表すことが極端に難しい概念や主張をすっきりと表現できるようになる，という利点があるのです．数学は3000年近くの歴史を持っていて，その長い時間の間に蓄積された数学の研究結果や論法などに関する知識を踏台にして議論するので，特に数学の研究の最前線での議論は，非常に難しい内容を持つものにならざるを得なくなることが少なくありません．記号の使用は，そういった難解な領域でも，明晰に考えを進めるために有効な手段なのです．

そういうわけで，数学が難しい，というのは，これはまあ，ある意味では事実かもしれませんが，記号の使用は，難しさの理由ではなくて，むしろ，この数学の難しさに対する画期的な対策なのです．とは言っても，この講義ではむやみに難しくて歯がたたないような数学理論について議論しようとしているわけではないので，心配しないでください．

文字定数や文字変数の使用例として，高校の数学の授業にも出てきそうな，次のような命題を見てみることにしましょう:

命題 1 x を任意の実数とする．x が条件 $(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つときである．

復習しておくと，実数とは，直観的には数直線上の点として表される数のことで，0, 1, 2, 3 といった自然数，$-1, -2, -3$ などのマイナスの数も含めた整数，$-\frac{1}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{1892978}{118225}$ などと分数で表すことのできる有理数，それ以外の $\sqrt{2}, \pi$ などをすべて含むものです．

“x” はこのような数の範囲のなかからどれかをとってきたものの，ここでの暫定的な名前として導入されています．x としては，どの実数をとってきてもいいのですが，ここでは，文字定数 x が導入れた後で，実は x は，$(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ を満たす，つまり，この数 x に 7 を足して得られる数と，x に 5 を足して得られる数と，x から 1 を引いて得られる数，それに x 自身の 4 つの数をかけあわせて得られる数が 0 より小さいか等しくなるようなものである，として選択の範囲がせばめられています．ここでの主張は，そのような x をどのようにとっても，-7 と -5 の間（だだし x が -7 または -5 となる場合は除く）にあるか，0 と 1 の間（だだし x が 0 または 1 となる場合は除く）にあるかの，どちらかが必ず成り立つということです．

先程「どんどん新しい記号を導入してそれを積極的に使うことで，普通の言葉では表すことが極端に難しい概念や主張をすっきりと表現できるようになる」と書きましたが，記号や式を使うことのメリットは，上の命題 1 として記号や式を用いた表現と，一つ前のパラグラフでの，この命題 1 の内容の日本語による説明を比較してみても明らかでしょ

[1)] コンピュータのプログラミングを勉強したことのある人は，たとえば C 言語では，`for`, `if`, などの予約語があり，変数にも，グローバル変数とローカル変数の違いがあるということを習ったと思いますが，ここで言っている記号の種類の違いは，プログラム言語での，このような記号や変数の役割の違いに対応するものといえます．

う．記号や式の使い方さえちゃんと判っていれば，いちいち一つ前のパラグラフでのようにごたごたと言葉を重ねなくても，数学的な内容をコンパクトにしかも正確に表現できるようになるのです．

1.2　厳密に証明する

数学では，主張されるすべての命題は厳密に証明されます．実際には，上級者向けの教科書や数学の研究論文などでは，読者が考えればすぐに証明が再現できるような場合には，「自明である」(Trivial.) とか「証明は略す」(The proof is left to the reader.) などとして証明を書き出さないこともありますが，これも単に書くと長くなるからとばしているだけで，そのような書き方になっている教科書や研究論文の著者は，読者が，とばした議論を既に熟知しているか，あるいは，そうでない場合でも，自分の頭の中で考えたり紙に書き出して確かめたりしてみることで，省略した議論を補って理解してくれることを，当然のこととして期待しているわけです．

多くの自然科学の研究では，証明に代るのは，実験による理論の検証でしょう．コンピュータ・プログラムの検証（デバッグ）もこれにいくらか似ています．自然科学での実験やコンピュータ・プログラムの検証では，いくつかの典型的な，あるいは極端な場合を設定して，その場合に理論の予想どうりの実験結果が得られたり，コンピュータプログラムが予想されるような動作をすることを確かめたりするわけですが，これは数学の証明のような完璧なものではなくて，時々後になって修正が必要になる場合もあります．

例えば，物理学を例にとってみると，ニュートンによって確立された古典力学は，多くの実験により，力学的な物理現象を正しく記述する理論である，と思われていましたが，20 世紀に入ってから，それまでの物理学がうまく扱うことのできなかったスケールの大きな世界や極端にスケールの小さい世界では，古典力学は物理現象の記述の近似にしかなっていなくて，相対性理論や量子力学などによって，より正確に記述されることがわかってきたのでした．

これに対して，数学での命題は一度証明されると未来永劫にわたって正しい命題であり続けます．たとえば三平方の定理（ピタゴラスの定理[2)]）は，ギリシャ時代，ピタゴラスの生きていた頃，今から 2500 年以上昔の時代に証明された定理ですが，その時代に得られた証明は，現代でも，この定理の正しい証明といえます．もちろん数学の理論が進歩して，昔に得られた定理の理解がより深まったり，より一般化されたりする，ということはありえますし，ある時代に非常に重要と考えられた結果がその後それほど脚光を浴びなくなったり，またその逆ということもありえます．しかし，正しさということに関しては，数学の結果は，いったん証明されてその証明の正しいことがチェックされると，その正しさは絶対的です．

[2)] ピタゴラスの定理: 直角三角形の直角をはさむ二辺のそれぞれの長さの二乗の和は他の一辺の長さの二乗と等しい．

数学の証明の例は，この後でも，この講義で沢山出てくることになりますが，ここではとりあえず，前の節で例としてあげた命題 1 の証明の一つを見てみようと思います．

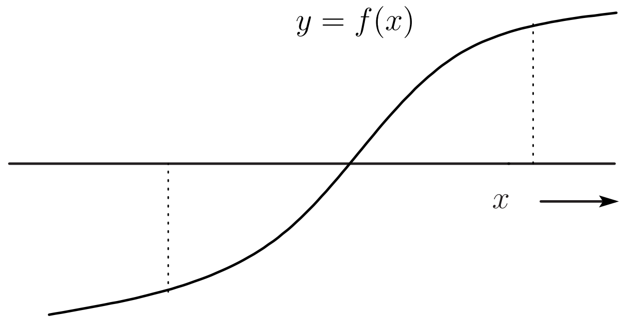
ついでに言うと，今「命題 1 の証明の一つ」と書きましたが，一つの数学の命題に対して，全く別のアイデアによるいくつもの証明があることはまれではありません．正しいことが証明されるのに一つ証明があれば十分ではないか，と思う人もいるかもしれませんが，数学の命題の証明は，多くの場合その命題の意味や背景に関するより深い洞察が含まれているので，ある命題に異なる視点からのいくつかの証明が与えられることで，その命題の意味がより多角的に理解できることが多いのです．そのため，重要な定理には，非常に沢山の異なる証明が与えられていることが少なくありません．たとえば，先に触れた三平方の定理では．200 を越える異なる証明が知られていますし，代数学の基本定理[3)]では，少なくとも 4 つの全く異なるアイデアによる証明が知られています．

さて，「命題 1 の証明の一つ」ですが，$f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ という関数を考察することにします．$f(x)$ が関数とは，ある値（たとえば 5）が与えられたとき，それに対応する値 $f(x)$ （この場合 $f(5) = (5+7)(5+5)(5-1) = 480$）を返すような対応（規則）のことです．ここでの f は x と同じように，考察する関数にとりあえずつけられた名前で，f でなくても，たとえば g でも h でも φ でも ψ でも何でもいいのですが，特に制約がないときには，“関数”を現わすラテン語由来の単語（英語では function）の頭文字である f を使うことが多いのです．

命題での条件 $(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ は，この $f(x)$ を使うと $f(x) < 0$ と書きなおすことができます．ここで，x を動かしたとき，$f(x) < 0$ が成り立っているところから，これが成り立たないような，つまり $f(x) \geq 0$ となっているような領域に移動したとします．$f(x)$ は多項式によって与えられた関数なので，x を変化させたときに $f(x)$ の値も“なめらかに”変化します（このことを数学用語では $f(x)$ は連続である，と言います[4)]）．したがって，x を $f(x) < 0$ が成り立っているところから，$f(x) \geq 0$ となっているようなところに動かしたときには，その間のどこかで x 軸を横切っていなくてはならない，つまり $f(x) = 0$ となる点 x がこの間のどこかにくてはならないことが分ります．

[3)] 代数学の基本定理: 任意の多項式は複素数係数に拡張して考えると常に一次式の積に分解される．

[4)] ここで言っている“なめらかに”は，グラフの値にジャンプがないという意味です．関数のグラフのなめらかさには，1 回微分可能，2 回微分可能，...，など，ここでのものよりもっと強い条件となっているものもあるので，念のために注意しておくことにします．



つまり，

(1.1) ある 2 点 a, b $(a < b)$ の片方で $f(x) < 0$ が成立っていて，もう片方では $f(x) > 0$ が成り立っているならば，$a < c < b$ となる点 c で $f(c) = 0$ となるものが存在する．

が成立ちます．

数学で用いる論理での “ならば” の解釈では，“A ならば B” と “B でないならば A でない”は同値です．つまり，これらの 2 つのタイプの主張の論理的な正しさは同じになります[5]．したがって，(1.1) から，

(1.2) ある 2 点 a, b $(a < b)$ に対し，$f(c) = 0$ となる点が a と b の間に存在しないならば，$f(x) < 0$ は a と b の両方で成り立つか，あるいは a と b の両方で成り立たない

ことがわかります．このことから，$f(x) = 0$ となるような点 x が $f(x) < 0$ の成り立つ領域の境界になることがわかります．

一方，この等式 $f(x) = 0$ は

(1.3) $(x + 7)(x + 5)(x - 1)x = 0$

ということですから，この式を満たすような実数 x は $x + 7 = 0$, $x + 5 = 0$, $x - 1 = 0$ または $x = 0$ のどれかを満たすものでなくてはならないことがわかります．つまり，(1.3) を満たすような x は -7, -5, 0, 1 のうちのどれかだということになります．このことと，(1.2) から，$f(x) < 0$ の成り立つような x の全体は $(-\infty, -7)$, $(-7, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ という区間のうちの幾つかを合わせたものになっていることがわかります．これ

[5] 数学での “ならば” は日常語での条件文での “ならば” とは微妙に異なります．日常語の “ならば” が時間の推移や文章の発言者の知識の推移などに関する言及を含むものなのに対し，数学での論理での“ならば” 客観的かつ超時間的なものだ，というのがその微妙な異差の原因と言えるでしょう．その結果，数学では “A ならば B” と “B でないならば A でない” とは同値（論理的な真偽が同じ）になります．これに対して，例えば，“雨が降るならば傘を持ってゆく” と “傘を持ってゆかないならば雨が降らない” は明らかに異なる主張になっていることに注意してください．ちなみに，“B でないならば A でない” は “A ならば B” の**対偶命題** (contraposition) と呼ばれます．

らの区間のうちのどれとどれを合わせたものが，$f(x) < 0$ の成り立っているような x の全体になるのかを見るには，これらの区間の端点以外のどれかの点をとってきて，そこで $f(x) < 0$ が成り立っているかどうかを調べればわかります．たとえば，そのような点として $-8, -6, -4, 0.5, 2$ をとってきて，そこでの $f(x)$ の値のプラスマイナスを調べてみると，$f(-8) = (-1) \times (-5) \times (-9) \times (-8) > 0$, $f(-6) = 1 \times (-1) \times (-7) \times (-6) < 0$, $f(-4) = 5 \times 1 \times (-5) \times (-4) > 0$, $f(0.5) = 7.5 \times 5.5 \times (-0.5) \times 0.5 < 0$, $f(2) = 9 \times 7 \times 1 \times 2 > 0$ となります．

したがって，$f(x) < 0$ を満たすような x の全体は -6 を含んでいる区間 $(-7, -5)$ と 0.5 を含んでいる区間 $(0, 1)$ を合わせたものであることが分ります．

このことは言葉を変えると，実数 x が，$f(x) < 0$, つまり $(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ を満たすことと，x が不等式 $-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ を満たすことが同値である，ということなので，命題 1 が示せたことになります．

1.3　一般化する

受験数学のようなものに習熟している人の中には，命題 1 のようなあたりまえな主張に，なんでこんな余計な議論をするのか，と腹を立てた人もいるかもしれません．実際，

$$(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$$

なんていう不等式を扱うだけだったら，実は関数の概念などをわざわざ持ち出す必要はなかったのです．しかし，私が前節でわざわざちょっと持って回ったような証明を持ちだしたのには訳があります．前の節の証明をよく見てみると，$f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ がこの形をしていることを使っているのは，

> $f(x) = 0$ となるのは，$x = -7, = -5, x = 0, x = 1$ のどれかが成り立つちょうどそのときである

ということを示すところと，

> $f(x)$ は連続である

という主張，それから，

$$f(-8) > 0,\ f(-6) < 0,\ f(-4) > 0,\ f(0.5) < 0,\ f(2) > 0$$

となっていることを計算するところだけです．したがって，前の節での証明と全く同じアイデアで，命題 1 をその特殊な場合として含む，次のようなもっと一般的な命題が示せることがわかります．

命題 2 $f(x)$ を実数上の連続な関数とする．今，$n > 0$ をある自然数として，実数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ について，

$f(x)=0$ となるのは，$x=a_1$ または，$x=a_2$ または，... または $x=a_n$ となるちょうどそのときである

とする．形式的に $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=\infty$ と書くことすると，$f(x)<0$ を満たす実数 x の全体は，区間 (a_i, a_i+1), $0<i<n$ のうちのいくつかを合わせたものになっている．特に，$b_0<a_1<b_1<\cdots<a_n<b_n$ で，$0<i_1<i_2<i_k<n$ として，

$f(b_i)<0$ となるのは i が $i_1,\ldots,i_k$ のうちのどれかであるちょうどそのときである

とき，$f(x)<0$ を満たすような実数 x の全体は，区間 (a_{i_1}, a_{i_1+1}), (a_{i_2}, a_{i_2+1}),..., (a_{i_k}, a_{i_k+1}) を合わせたものと一致する．

一般化をすることの利点は 2 つあります．ひとつは，問題を一般化することで，その問題の本質がよりよく見えるようになることです．個別例を見ているとその個別例の特性の中の何が今考えている問題で本質的にきいてきているのかが見えにくくなっていることが往々にしてあるわけですが，問題を一般化することで，問題に本質的にかかわっている条件が何なのかがはっきりするからです．

抽象性の度合が変らないような一般化が問題の解決につながることもあります．この場合には一般化によって問題を難しくしているだけなので，あまり一般化をする意味がないようにも思えますが，ここでも個別の事例にとらわれずに広い視点で考えることによって，より難しいはずの問題の解決の糸口の方が容易に得られてしまうことがありえるのです．第 1.6 節で述べることになるケーニヒスベルクの橋の問題のオイラーによる解はこのような現象の良い例の一つと言えます．

一般化のもう一つの利点は，思考経済 (ドイツ語: Gedankenökonomie) です．ただし，この言葉はむしろ「思考節約」と翻訳した方がもとの言葉の意味に近いかもしれません．“Ökonomie” は，ここでは現代日本語で「エコノミカルに」などと言うときの使い方に近い使われかたをしています．つまり，一般化された問題を考察しておくことで，似たような雑多な問題を一つ一つ繰り返して考えなおす手間から解放されて不必要に頭をつかわずにすむ，ということです．

これらの 2 つの利点は，第 1.5 節で触れることになる抽象化についても同じようにあてはまる利点です．

1.4　厳密に証明する（その 2）

命題 1 や，その一般化である命題 2 の証明では，すべての連続関数に対して (1.1) が成り立つ，という事実が本質的に用いられていました．実は，この事実は，中間値の定理という名前で知られている次の定理の特別な場合です:

定理 3 （中間値の定理） $f(x)$ を任意の連続関数とする．x_0, $x_1\in\mathbb{R}$ $a<b$ を，閉区間 $[a,b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれ $f(a)\neq f(b)$ となるものとする．このとき，$d\in\mathbb{R}$ が

$f(x_0) < d < f(x_1)$ または $f(x_0) > d > f(x_1)$ を満たすなら，$a \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ で，$f(c) = d$ となるものが存在する．

「主張されるすべての命題を厳密に証明する」という数学の基本スタンスを保守しなくてはいけないとすれば，この定理 3 もきちんと証明する必要があります．8 ページの図のようなものを頭に描いて，理解したと思って先に進んでしまえばいいような気がする人もいるかもしれません．しかし，直観は時としてあてにならないこともあります．特に，数学で扱かう連続関数の中には，普通の意味のグラフの全く描けないようなものもあります．そのような関数すべてに対して，8 ページの図のようなナイーヴ(うぶ)な直観が通用するかどうかは全く保証の限りではないのです．

定理 3 の証明: $f(x)$ の代わりに $f(x) - d$ を考えればよいので，はじめから $d = 0$ としてよい．たとえば $f(a) < 0 < f(b)$ とする．$a_0 = a$, $b_0 = b$ とする．a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(c_0) = 0$ なら，これを c とすればよい．$f(c_0) \neq 0$ で，$f(a_0)$ と $f(c_0)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ とする．そうでなければ，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なる．このときには，$a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ とする．

以下同様の構成を繰り返す．この構成が途中で，ある n に対して $f(c_n) = 0$ となって）ストップすれば，そのような c_n が求めるようなものである．そうでなければ，$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots b_2 \leq b_1 \leq b_0$ となる．$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば，$f(x)$ の連続性から，$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ となるから，この c が求めるものである．

（証明終）

実は，上の証明は，中間値の定理（定理 3）の主張そのものよりもっと多くの有益な情報を与えてくれています．上の証明での数列 c_n, $n \in \mathbb{N}$ を $f(c) = 0$ となるような c の近似列だと思うことによって，この証明から，方程式 $f(x) = 0$ の数値計算による解法のアルゴリズム[6)]が抽出できるからです．

連続関数 $f(x)$ で ある $a < b$ に対して $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なる場合の，$f(c) = 0$ となるような $a < c < b$ の数値解を求めるためのアルゴリズム:

(1)　$a_0 = a$, $b_0 = b$ とする．

(2)　a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(a_0)$ と $f(c_0)$ の符号が異なるか，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ の符号が異なるかのどちらかである．前者なら $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ とし，後者なら，$a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ とする．

(3)　a_1 と b_1 の中間点 c_1 をとり，(2) と同様に議論して a_2, b_2 を得る．以下同様に a_0, a_1, a_2, a_3,..., b_0, b_1, b_2, b_3,... ととってゆく．

[6)] 機械的に計算をするための手続きをアルゴリズムと呼びます．たとえば皆さんは，2 つの整数の十進法表示が与えられたときに，その和や積の十進法表示を計算するアルゴリズムを小学校で習っていると思います．

(4)　（十分に大きな n に対して），このとき c_n は，$f(c)=0$ を満たすような c の数値解となっていて，誤差は $b_n - a_n$ 以内である．

上のアルゴリズムを使って，$x^3-4x^2+3x+2=0$ の 2.1 と 3.0 の間にある解の数値計算をする C のプログラムを書いてみましょう．ちなみに，$f(x)=x^3-4x^2+3x+2$ とすると，$f(2.1)=-0.079$, $f(3.0)=2.0$ となるので，確かにこの 2 つの値の間のどこかに少なくとも 1 つは存在することがわかります．

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
/*
x^3-4x^2+3x+2=0 の 2.1 と 3.0 の間ある解の数値計算
*/
#define LEFT 2.1
#define RIGHT 3.0
#define N 40  /* 精度 */
extern double f(double x);
main()
{
  double a,b,c, fa, fb, fc;
  int i;
  a=LEFT; b=RIGHT;
  for(i=0;i<N;i++)
  {
    c=(a+b)/2.0;
    if (f(a)*f(c)<0.0)
    b=c;
    else
    a=c;
  }
  printf("The (numerical) solution is: x = %lf\n",c);
}

double f (x)
double x;
{ return (x*x*x-4*x*x+3*x+2);
}
```

上のソース・プログラムでは，

```
double f (x)
```

以下の行で $f(x)=x^3-4x^2+3x+2$ を計算するサブルーチンが定義されています．ここの定義と，最初の方のマクロ定義

```
#define LEFT 2.1
#define RIGHT 3.0
```

で定義されている左右の端の値を変更すれば，他の応用のためのプログラムに作りなおすことも容易です．

このソースプログラムをコンパイルして出来上がったプログラムを走らせると，

```
The (numerical) solution is: x = 2.414214
```

という出力が得られます．実は x^3-4x^2+3x+2 は，$(x-2)(x^2-2x-1)$ と因数分解できるので，$x^3-4x^2+3x+2=0$ の 2.1 と 3.0 の間の解は $1+\sqrt{2}$ となることがわかります．これをコンピュータ上の電卓で計算してみると

```
1+2^0.5=2.414213562373095
```

となるので妥当な数値解が得られていることがわかります．

ついでに言っておくと，上のアルゴリズムは便利ですが汎用ではありません．最初に $f(a)$ と $f(b)$ の符号の異なる $a<b$ がうまく見つからないと応用できないということもありますが，たとえば，$f(x)=x^2-2\sqrt{2}x+2$ のように，グラフが x-軸をかすめるけれど横切らないような関数に対しては $f(x)=0$ の解を求めることがまったくできないからです．このような $f(x)$ に対しても $f(x)=0$ の数値解を見付けてくれるようなアルゴリズムとしては，$f(x)$ だけでなく $f'(x)$ も用いるニュートン法と呼ばれるものや，その様々な改良などが知られています．

1.5　抽象化する

「あなたの言っていることは抽象的でよくわからない．もっと具体的に述べてくれないか.」というのは日常会話でよく聞く台詞です．「抽象的である」ということは，一般には，かなり否定的にとらえられることの多い性質のようです．しかし，数学では，“抽象”という言葉はむしろ肯定的なニュアンスで使われることが多いのです．行きすぎの抽象的議論が“abstract nonsense” と言ってからかわれることもありますが，数学者のコミュニティーでは，“抽象的である”はおおむね「分りやすい」や，「本質的である」と同義語として使われます．実際，抽象化というのは，考えている問題と関係のない側面をすべてそぎおとす，というような作業なので，正しい抽象化は物事の本質をより鮮明に見せてくれるはずです．ここでは，代数学[7]での，群（ぐん）の概念を例にとって抽象化ということについて考えてみることにしましょう．

---

[7] ここで代数学と呼んでいる分野は，昔は古典的な代数学と対比して“抽象代数学”と呼ばれることもあったりました．しかし， 今ではこの名称を使うことはまれで，単に代数学と言って，ここで述べる群や後で触れる環や体の理論のことを指すのが普通です．

$\mathbb{R}$ で実数の全体を表すことにします[8)]． $\mathbb{R}$ の要素に対する足し算の基本性質が何かを考えてみることにします．もちろん実数の足し算の基本性質として考えられる性質は沢山あるわけですが，次のような性質が最も基本的なもの中に入っていることは誰も異存がないでしょう:

(1.4) すべての実数 x, y, z に対して $(x+y)+z = x+(y+z)$ が成り立つ．

(1.5) ある実数 E があって，どんな実数 x に対しても $x+E=x$ が成り立つ．

(1.6) 上の (1.5) でのような E をとるとき，どんな実数 x に対しても $x+y=E$ となるような実数 y が存在する．

(1.5) と (1.6) については，一見何のことか分らないと思った人もいるかもしれませんが，(1.5) での E として 0 をとり，(1.6) では，実数 x に対して $-x$ を y としてとれば，これらの性質が成り立っていることは直ちに分ります．

(1.7) すべての実数 x, y に対し，$x+y=y+x$ である

というのも足し算の基本性質の一つでしょう．

(1.4) や (1.7) の性質は，あまりにあたりまえになっていて意識することがないかもしれませんが，たとえば，

$$3+2+4+5+6+7+5+3$$

という計算をするときに，$\overbrace{(3+2+5)}^{10}+\overbrace{(4+6)}^{10}+\overbrace{(7+3)}^{10}+5=35$ とならべなおしたり組合せなおしたりして暗算してよい，ということは，これらの基本性質の組み合せにより保証されていると考えることができます．

上の性質 (1.4), (1.5), (1.6) （および (1.7)）は実数の足し算の基本性質という観点から考えた性質でしたが，実は，同様の性質を持つ演算は実数の足し算以外にも沢山あります．

例 1 $\mathbb{R}_+$ で正の実数の全体を表すことにする．つまり $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ である．$x, y \in \mathbb{R}_+$ に対して，xy （x と y のかけ算の結果）はまた $\mathbb{R}_+$ の要素になる．$\mathbb{R}_+$ の要素に対するかけ算（積）は，次の性質を満たす:

(1.8) すべての $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ に対して $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ．

(1.9) $E \in \mathbb{R}_+$ があって，どんな $x \in \mathbb{R}_+$ に対しても $xE = x$ が成り立つ．

[8)] 第 1.1 節でも述べたように実数とは直観的には数直線上の点として表されるすべての数のことです．$\mathbb{R}$ という記号は，“実数” が，たとえば英語では real numbers （フランス語では nombres réels ドイツ語では reelle Zahlen ）と呼ばれることから，この頭文字をとって命名されたものです．実数については後でもう少し詳しく述べます．

(1.10)　(1.9) でのような E をとるとき，どんな $x \in \mathbb{R}_+$ に対しても $xy = E$ となるような実数 y が存在する．

(1.11)　すべての $x, y \in \mathbb{R}_+$ に対し，$xy = yx$ が成り立つ．

演習問題 1 上の例の (1.9) と (1.10) で E と y として何をとればいいか考えてみてください．

例 2 n をある 0 でない自然数として，$a_1, \ldots, a_n$ を n 個の異なる記号とする．これらの記号のならべかえの全体を $S(n)$ であらわすことにする[9]．たとえば，n が 4 のとき，$S(n)$ の要素の一つは

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{array}$$

とあらわすことができる．s と t を $S(n)$ の要素とするとき，$s \circ t$ で，t と s を合成して得られる並べかえをあらわすことにする（s と t の順序に注意）．$n = 4$ の例では，たとえば s と t が

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \end{array} \qquad \text{と} \qquad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \end{array}$$

のときには，$s \circ t$ は

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array}$$

と合成して，

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array}$$

である．

例 2 での演算 $\circ$ では，前の例とは異なり，演算順序によって計算結果が変ることがあります．たとえば，上の $s, t \in G(4)$ について，$t \circ s$ を計算してみると，

[9] すぐ後で出てくる用語の先取りして言うと，ここで考えている $S(n)$ は，n 次の対称群 (symmetric group) と呼ばれるものです．

$$
\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
a_2 & a_1 & a_4 & a_3
\end{array}
$$

と合成して，

$$
\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
a_2 & a_1 & a_4 & a_3
\end{array}
$$

となり，$s \circ t$ とは異なる結果となることがわかります．このように演算が順序によって異なる可能性があるとき，これを，この演算（ここでは $\circ$）は**可換**でない，あるいは**非可換**である，と表現します．これに対し，実数の足し算や，正の実数のかけ算は可換です．つまり，(1.7) や (1.11) が成り立っていて演算の結果は演算の順序をかえても結果は同じです．

上のような演算 $\circ$ を $S(n)$ で考えると，この演算は，前の例での，$\mathbb{R}$ での数の足し算や，$\mathbb{R}_+$ での数のかけ算と同様な基本性質を持つことが示せるのですが，このときの基本性質は，$\circ$ が可換でないことを考慮して，前とは少し違ったまとめかたをする方がよさそうです．そこで，次のような演算の性質を考えてみることにします:

(1.12)　すべての x, y, $z \in S(n)$ に対して $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ．

(1.13)　$e \in S(n)$ があって，どんな $x \in S(n)$ に対しても $x \circ e = e \circ x = x$ が成り立つ．

(1.14)　(1.13) でのような e をとるとき，どんな $x \in S(n)$ に対しても $x \circ y = y \circ x = e$ となるような $y \in S(n)$ が存在する．

たとえば，実数の足し算は可換，つまり，(1.7) の性質があるので，(1.5) で $x + E = x$ と言ったときには，$E + x = x + E$ も (1.7) から導き出せてしまうわけですが，ここでは，$\circ$ は (1.7) に相当する性質を持たないため，たとえば (1.13) で $x \circ e = x$ と言っただけでは，$e \circ z = x$ も成り立つかどうかは，少なくとも直接的には分らない，というのが上のような書き方になっている理由です．

ちょっとしつこいような気もしますが，もう一つ例を見てみることにしましょう．

例 3 前の例と同じように，n をある自然数として，n 個の数の集まり

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

を考えます．たとえば n が 3 のときには， X は $\{0, 1, 2\}$ です．$k, l \in X$ に対して，$k \tilde{+} l$ を，$k + l$ を n で割った余りとします．

[ここはまだ書きかけです]

1.6　問題を他の問題に帰着させる

数学では，ある問題を解くために，その問題を別の問題に翻訳して，もとの問題ではなくて翻訳された問題の方を解く，という方法がとられることがよくあります．A という問題を解くために，B という問題が解ければ，その解から A の解も得られることが判っているような問題 B をうまく設定して，A を解くかわりに B を解くのです．このような問題 B を見つけることを，「問題 A を問題 B に帰着させる」と表現します．B は以下の例でのように単に A の言い替えにすぎない場合もありますが，面白いことには，B は A よりむしろ難しい問題になっていることも多いのです．これは，問題がやさしいか難しいかは必ずしも問題が解きやすいかどうかということと一致しない，ということでしょう．

多くの場合，解きたい本来の問題 A を帰着させる先の問題 B は A よりずっと抽象的な問題になっています．これは，前の節でも述べた，抽象的な設定の方が数学的には扱いやすい，という現象の現われと言えるでしょう．

もとの問題 A が一般的な（必ずしも数学で扱えそうには見えないような）問題で，それを数学的な問題 B に帰着させているときには，A の数学化 (mathematization) が B である，というような言い方をすることもあります．

一般的な問題を数学的な問題に帰着させる，つまりこの一般的な問題の数学化を行う例として「ケーニヒスベルクの橋の問題」という名前で知られている問題について考察してみることにしましょう．

ケーニヒスベルクは現在はロシアに属していますが，ドイツ，ポーランド，ロシアなどの文化圏の交差点にある港街で，ここで話すことになる「ケーニヒスベルクの橋の問題」が話題になった 18 世紀初めごろにはドイツの王国プロシアに属していました．異なる文化圏の交差点にあるヨーロッパの港町というと，ジェームス・ジョイスが住んでいたことのあるトリエステや，ケーニクスベルからそう遠くない，現在はポーランドに属しているグダニスク（ダンツィッヒ）なども思い浮かびます[10)]．

トリエステもグダニスクも，それぞれ，多くの個性的な歴史上の人物のゆかりの場所ですが，ケーニヒスベルクについても，哲学者カントなど，文化史上の人物で，この街との関係の記憶されている人は少なくありません．特に，これから話すことになる「ケーニヒスベルクの橋の問題」に登場するオイラー，π の超越性を証明したリンデマン，この街の出身のヒルベルト，ミンコフスキーなど，ケーニヒスベルクとゆかりのある多くの数学者の名前も思い浮かびます．

18 世紀ごろ，ケーニヒスベルクの旧市街を流れるプレーゲル川には，その両岸と中之島と中洲を結ぶ 7 つの橋がかかっていました:

[10)] ギュンター・グラスの長編小説「ブリキの太鼓」は二次対戦前後のダンツィッヒの雰囲気をよく伝えています．

18 世紀ごろのケーニヒスベルクの地図 11)

左の地図の 7 つの橋の部分

これらの橋をちょうど一回づつ渡る歩き方があるか? というのが「ケーニヒスベルクの橋の問題」として知られています[11]．

1735 年にオイラー (Leonhard Euler, 1707–1783) はこの問題を否定的に解いています[12]．つまり，彼は，これらの橋をちょうど一回づつ渡るような歩き方は存在しないことを数学的に証明したのです．以下で，オイラーのこの問題の解決への思考の流れをたどってみようと思います．

まず，問題を整理して数学的に扱いやすい形に記述しなおすことを試みます．地図を見ると，プレーゲル川の下流には，五稜郭のようなシタデルや城壁があることがわかります．またヨーロッパの古い街の構造をよく知っている人は容易に想像できると思いますが，中之島にはゴシックの教会が立っていることもケーニヒスベルク街のガイドブックで確かめることができます．

ケーニヒスベルクの中之島の教会 11)

[11] These pictures are from Peter Taylor's web page:

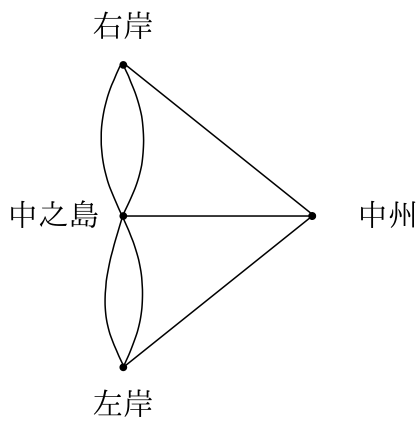
`http://www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html`

I would like to thank Professor Peter Taylor for giving me a permission to include them here.

[12] 数学の未解決問題は，「... という主張は正しいか?」 というような形をとることが多いのですが，そのような問題が解けたときには，その主張が正しいと分った（証明された）場合も，間違っていると分った（証明された）場合もありえます．そこで，このような主張が正しいことが証明されたときには，「この問題は肯定的に解かれた」といい，「...」が実は間違っていたことが証明されたときには，そのことを，「この問題は否定的に解かれた」，と表現します．

島にかかっていた北東の橋の跡[11]．背景には北西の橋が写っている．

しかし，これらは，今考えようとしている橋の問題とはあまり関係のありそうにない情報と言えます．そこで，これらを含めた関係のなさそうな情報をすべてとりさって，問題になる情報のみを数学的な言葉に翻訳すること（つまり前節で話した「抽象化」）を試みてみます．街を歩くといっても，ここでは，どの橋をどの順序でどの方向に渡るかということだけが問題です．たとえば中之島の中をどう歩くかということは，この場合問題ではなくて，中之島について言えば，ここにかかった橋をどの順序でどの方向に渡るかのみが問題となっているわけです．そこで，川の左岸と右岸，中之島と中洲をそれぞれ点で表し，それぞれの橋をこれらの点をむすぶ線で表すことにすると，



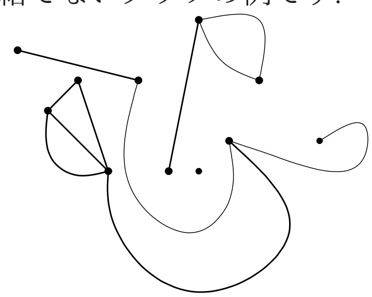
というような図式が得られます．ケーニヒスベルクの橋の問題は，この図式で点を結んでいる線の全部を一回づつなぞることができるか？ あるいは，この図式が一筆書きできるか？ という問題に翻訳されることがわかります．

次のステップは数学で特徴的なものです: 第 1.3 節で述べたような一般化を行なって，上のような一つの図式を考えるだけでなく，すべての図式に対して，それが一筆書きできるのはどういうときか，という，より一般的な，したがって，この場合，より難しい問題を考えることにするのです．この一般化が，急がば回れ的な効果を発揮して，問題のエレガントな解決へ導いてくれることを，我々はすぐに見ることになります．

まず，厳密に議論が行なえるようにいつくかの用語を導入しておくことにします．使

う用語は，ここでの議論ができるものなら何でもいいのですが[13]，もっと先まで勉強してみたい人の便宜なども考えて，数学で標準的に用いられているものに合わせることにします．

上の図式のように，いくつかの点を線で結んだものを**グラフ** (graph) と呼びます．グラフにあらわれる点や線のことを，それぞれ，そのグラフの**頂点** (vertex, 複数は vertices) と**辺** (edge) と呼ぶことにします．グラフが一筆書きできるためには，少なくとも，辺をたどって，どの頂点からどの頂点にも行けることが不可欠です．G の頂点 p から G の辺をたどって頂点 q に到達する道筋のことを p から q への**パス** (path) と呼ぶことにします．どの頂点からどの頂点のパスも存在するようなグラフのことを**連結グラフ** (connected graph) といいます．次は，連結でないグラフの例です:



連結でないグラフはいずれにしても一筆書きができないので，ここでは考察の対象からはずしてしまうことにします．

グラフ G の頂点 p に対し，p につながっている辺の数を p の次数 (degree) とよびます．たとえば，前のケーニヒスベルクの橋をあらわすグラフで，左岸に対応する頂点の次数は 3 で，中之島に対応する頂点の次数は 5 です．ただし，ある辺の両方の端がループ状になって同一の頂点 p につながっている場合には，この辺の両方の端は p につながっている辺として別々に数えることにします．

以上の用語を用いると，ケーニヒスベルクの橋の問題の一般化は，

(1.15)　連結グラフが一筆書きできるのはどんなときか?

と言いかえることができます．この問題には，以下の定理 4 と次の節で証明する定理 5 で完全に解かれています．

ある連結グラフ G が一筆書きできるとき，2 つの場合が考えられます:

(1.16)　一筆書きの始点と終点が同じ場合．

(1.17)　一筆書きの始点と終点が異なる場合．

---

[13] これは，たとえば，「上の図式のように，いくつかの点を線で結んだものをクジラと呼ぶことにする．」として，これ以降このような図式をクジラと呼んだとしても，ここでの議論で何の問題も起きないということです．

(1.16) の場合も (1.17) の場合にも，一筆書きの始点でも終点でもない頂点 p については，一筆書きで，ある辺を通ってこの点に到達したときには，この点から先に進めなくてはならなず，一筆書きが終るまでには，p につながった辺はすべて通られているので，p には偶数個の辺がつながっていなくてはならない，つまり，p の次数は偶数でなくてはならないことがわかります．

(1.16) の場合には，ある G の頂点 p^* があって一筆書きはこの頂点から出発して，最後に p^* に到達して終っています．したがって p^* の次数は少なくとも 2 ですが，もし p^* の次数が 2 より真に大きければ，一筆書きでは，最初に p^* を出発した後，何回か p^* に戻ってきてまた p^* から先に進むことを繰り返した後で，最後に p^* に戻ってきています．したがって，p^* の次数も偶数でなくてはならないことがわかります．以上をまとめると，(1.16) の場合には，G のすべての頂点の次数は偶数です．

一方，(1.17) の場合には，G の異なる頂点 p_0, p_1 があって，一筆書きは p_0 から出発して，p_1 に到達して終っています．この場合には，上で見たように，p_0 とも p_1 とも異なる G の頂点の次数は偶数になりますが，p_0 では，一筆書きは最初に p_0 を出発した後，また p_0 に戻ってきたとすると，その後には p_0 から出てゆけなくてはならなりません．仮定から，p_0 は一筆書きの終点 p_1 とは異なるからです．したがって，p_0 の次数は奇数でなくてはならないことがわかります．同様に p_1 の次数も奇数でなくてはなりません．以上をまとめると (1.17) の場合には G は 2 つの次数が奇数であるような頂点を持ち，他の頂点の次数はすべて偶数です．

ここまでの議論で次が示せたことになります．

定理 4 (オイラー，1735) G を連結グラフとするとき，G が一筆書きできるなら，

(1.18)　G のすべての頂点の次数は偶数である；

(1.19)　G は次数が奇数の頂点をちょうど 2 つ持つ

のいずれかが成り立つ．

この定理の主張は次のように言いかえることもできます[14]：

(1.20)　G を連結グラフとするとき，

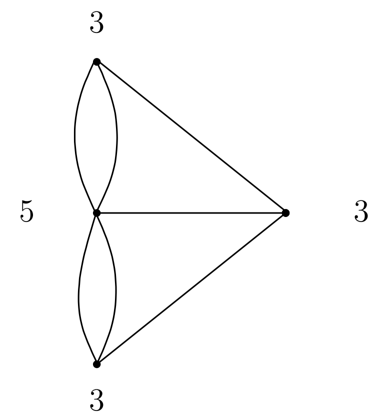
(1.18)'　G のすべての頂点の次数は偶数でない，かつ

(1.19)'　奇数の次数を持つ頂点の数が 2 でない

なら，G は一筆書きできない．

これをケーニヒスベルクの橋の問題でのグラフにあてはめてみると，このグラフの各頂点の次数は

[14] 8 ページとそこでの脚注 5) を参照してください．



となっていて，(1.20) の条件は満たされているので，このグラフは一筆書きできないことが帰結でき，ケーニヒスベルクの橋の問題の否定的な解が得られることになります．

1.7　数学的帰納法 — 定理 4 の逆の証明

数学的帰納法も，数学を特徴づける論法の一つと言えます．数学的帰納法が意識的に使われるようになったのは数学の歴史の中では比較的新しくて，B. パスカル (1623–1662) や J. ベルヌーイ (1645–1705) などがこの論法を最初に用いた人としてあげられることが多いようです．

自然数 n に対する命題 A に対し，

(1.21)　A は $n=0$ のときに成り立つ（帰納法の始め）;

(1.22)　A が $n=k$ のときに成り立つと仮定すると A は $n=k+1$ のときにも成り立つ（帰納法のステップ）

を示して，このことから，

(1.23)　すべての自然数 n に対して A が成り立つ

を結論する，というのが数学的帰納法です．帰納法のステップ (1.22) の前提条件は**帰納法の仮定**と呼ばれることが多く，以下でもこの用語を使うことにします．(1.21) から出発して，(1.22) を繰り返し適用することで，具体的に与えられた任意の数 n に対して A が成り立つことを示すことは容易です．このことと (1.23) を結論することの差は実は予想外に大きくて，この差を正しく評価することは，二十世紀になって始まった数学基礎論とよばれる数学の基礎付けの研究をする分野での主要な問題の一つですらあります．

それはともかくとして，現代の数学では，数学的帰納法は，上で述べたような (1.23) を帰結する強い形で，いたるところで使われています．

本節では，第 4 節の逆が成り立つことを主張する次の定理 5 の証明を，数学的帰納法の応用の例として見てみたいと思います．

数学的帰納法とわざわざ “数学的” をつけて呼んでいるのは，認識論の “帰納”という用語との混乱をさけるためですが，少々煩雑なので，以下では単に“帰納法” と呼ぶことにします．

帰納法は (1.21) と (1.22) から (1.23) を導く，という標準形のほかに，このバリエーションとして，(1.21) と，(1.22) の帰納法の仮定を強めて得られる次の (1.22)' から (1.23) を導く，という形で使われることもまれでありません:

(1.22)' すべての $\ell \leq k$ で $n = \ell$ に対して A が成り立つなら，$n = k + 1$ に対しても A が成り立つ．

この形の帰納法のことを，ここでは (1.22)' タイプの帰納法と呼ぶことにしましょう．

(1.22) なら (1.22)' なので，(1.22)' タイプの帰納法からオリジナルの帰納法が導けることは明らかです．逆に，オリジナルの帰納法が成り立つとすると，命題 A のかわりに，“すべての $\ell \leq n$ で，ℓ に対し A が成り立つ”という命題を考えてこれを $\tilde{A}$ とよぶことにすると，A に対する (1.21) と (1.22)' は，$\tilde{A}$ に対する (1.21) と (1.22) を導くので，オリジナルの帰納法から，“すべての自然数 n に対し $\tilde{A}$ が成り立つ”が導けることがわかりますが，このことから “すべての n に対し A が成り立つ”は容易に導けるので，A に対する (1.22)' タイプの帰納法も成り立つことがわかります．つまり，オリジナルの帰納法と，(1.22)' タイプの帰納法は同値です．

以下のオイラーの定理（定理 4）の逆を示す定理（これもオイラーによって得られたという言われることが多いようですが，この定理を実際に厳密に証明したのはオイラーより後の人のようです）の証明でも (1.22)' タイプの帰納法が用いられています．

定理 5 (定理 4 の逆定理) 連結なグラフ G が，(1.18) または (1.19) のどちらかを満たすとき，G の一筆書きが存在する．

定理の証明は，グラフの辺の数 を n として n に関する帰納法で証明するのですが，定理の命題をそのまま使って，

> すべての n 本の辺を持つ連結なグラフ G が，(1.18) または (1.19) のどちらかを満たすとき，G の一筆書きが存在する

がすべての自然数 n に対して成り立つことを n に関する帰納法で示そうとすると帰納法のステップがうまくゆかないことがわかります．

証明したい命題より強い命題をうまく設定してその命題を帰納法で証明する，というのが，このような場合によく使われるトリックです．ここでも，色々と試行錯誤をしてためしてみると，定理を主張を少し強めた次の形の主張がうまく帰納法の議論にのってくれることがわかります:

定理 6 (定理 5 の拡張) 連結なグラフ G が，(1.18) または (1.19) のどちらかを満たすとき，G の一筆書きが存在する．さらに，G が (1.18) を満たすときには，G の任意の点から出発してその点で終るような一筆書きが存在し，(1.19) が成り立つときには，次数が奇数の頂点の片方から始まり，もう一つの次数が奇数の頂点で終るような一筆書きが存在する．

証明． 次の主張がすべての n に対して成り立つことを n に関する帰納法で示せば十分です:

(1.24) n 個の辺を持つ連結なグラフ G が，(1.18) または (1.19) のどちらかを満たすとき，G の一筆書きが存在する．さらに，G が (1.18) を満たすときには，G の任意の点から出発してその点で終るような一筆書きが存在し，(1.19) が成り立つときには，次数が奇数の頂点の片方から始まり，もう一つの次数が奇数の頂点で終るような一筆書きが存在する．

n が 0 のときには，この命題は自明です．0 個辺の連結グラフは，全くの空集合か，一つの頂点を持つグラフからのいずれかですが，いずれの場合にも一筆書きは書きはじめる前から完成しているからです[15)]．

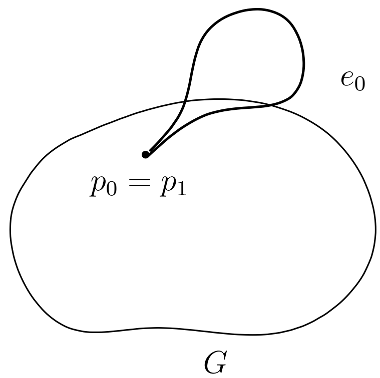
したがって，ある k に対して，すべての $\ell \leq k$ で $n = \ell$ としたときに (1.24) が成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ に対しても (1.24) が成り立つことを示せば，(1.22)' タイプの帰納法により，すべての自然数 n に対し (1.24) が成り立つことが帰結できることになります．

このために G を $k + 1$ 個の辺を持つ任意の連続グラフで (1.18) か (1.19) のどちらかを満たすようなものとして，G が (1.24) の主張を満たすことをいくつかの場合に分けて示すことにします．

場合 1: G が (1.18) を満たす場合．この場合には，G の任意の頂点 p_0 から出発して p_0 に戻って終る一筆書きの存在を示す必要があります．p_0 につながっている辺の一つを e_0 として，e_0 につながっているもう一つの頂点を p_1 とします．G' を G から辺 e_0 をとりさって得られるグラフとします．G' の辺の数は k になっていることに注意しておきます．さらに 2 つの場合に分けて考えることにします:

場合 1a: $p_0 = p_1$ の場合．

[15)] このような状況を英語では，“命題は vacuously に成り立つ”，と表現しますが，日本語にはこのような状況にしっくりとなじむ用語はないようです．

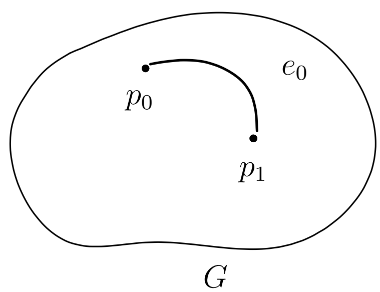


この場合には，G' は連結なグラフになっています: G' の任意の異なる 2 点 p, q は G の異なる 2 点でもあるわけですが，G での p から q へのパスは e_0 を含んでいないと考えてよいので，G' のパスでもあるからです．

また G' は (1.18) も満たしています: G' の p_0 以外の頂では，つながっている辺の数は G から変化しないので，偶数のままだし，p では，この場合には e_0 をとりのぞいたためにこの頂点につながっている辺の数は 2 だけ少なくなるので，やはり偶数のままだからです．

したがって，帰納法の仮定により，G' は p_0 から始まり p_0 に戻って終る G' の一筆書きが存在します．この一筆書きの最後に e_0 の作っているループを付け加えたものは G の p_0 から始まって p_0 に戻って終る一筆書きになっています．

場合 1b: $p_0 \neq p_1$ の場合．



この場合にも，G' は連結なグラフになっています: もし，G' が連結でないとすると G' は p_0 を含む連結なグラフ G_0 と p_1 を含む連結なグラフ G_1 に分解できますが，このとき，G_0 も G_1 も，それぞれ，p_0 と p_1 以外のすべての頂点の次数は偶数ですから，それぞれ，グラフに属す点の頂点の次数の和は奇数になってしまいます．ところが，次数の定義から，次数の和は，辺の数の 2 倍でなくてはならないので，これが奇数になることは不可能です．

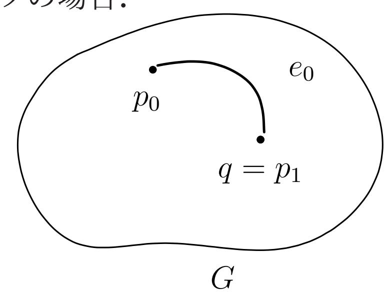
G' は p_0 と p_1 の次数がそれぞれ奇数になり，他の頂点の次数は G でと変らず偶数ですから，(1.19) を満たしています．したがって，帰納法の仮定により，G' の一筆書きで p_0 から出発して p_1 で終るものが存在します．この一筆書きに e_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは，p_0 から出発して p_0 に戻って終る G の一筆書きになっています．

場合 2: G が (1.19) を満たす場合．この場合には，G の頂点 p_0 と p_1 で次数が奇数となっているものが存在して，他のすべての頂点の次数は偶数です．p_0 の次数が奇数であることから，p_0 につながっている辺 e_0 で，この辺のもう一方の端点 q が p_0 とは異なるものがとれます．G から e_0 をとりのぞいて得られるグラフを G' とします．

さらに 2 つの場合に分けて考えることにします．

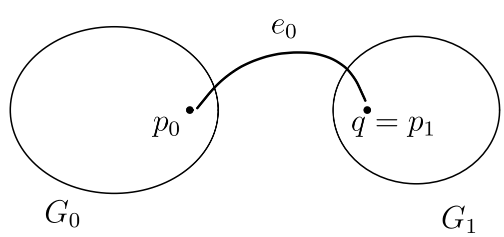
場合 2a: $q = p_1$ のとき．このときにはさらに 2 つの場合に分けて考えます:

場合 2aα**:** G' が連結グラフの場合．



この場合には，G' は辺の数が k で (1.18) を満たす連結グラフなので，帰納法の仮定から，p_0 から出発して p_0 に戻って終る一筆書きが存在します．この一筆書きに続けて e_0 を通って p_0 から p_1 に向う一画を加えたものは，G での p_0 から p_1 への一筆書きになっています．

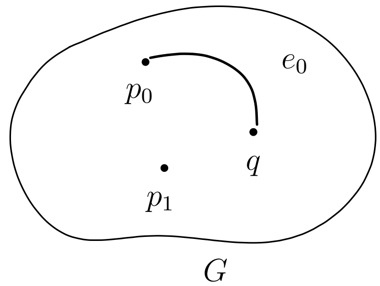
場合 2aβ**:** G' が連結グラフでない場合．



この場合には G' は p_0 を含む連結グラフ G_0 と p_1 を含む連結グラフ G_1 に分解できます．このとき G_0 も G_1 も 辺の数が k 個以下で，(1.18) を満たす連結なフラフになっているので，帰納法の仮定から，G_0 の p_0 から出発して p_0 に戻って終る一筆書き P_0 と，G_1 の p_1 から出発して p_1 に戻って終る一筆書き P_1 が存在します．このとき，p_0 から出発してまず P_0 を通って p_0 に戻り，次に e_0 を通って p_0 から p_1 に進み，p_1 から P_1 を通って p_1 に戻って終るパスは G の一筆書きになっています．

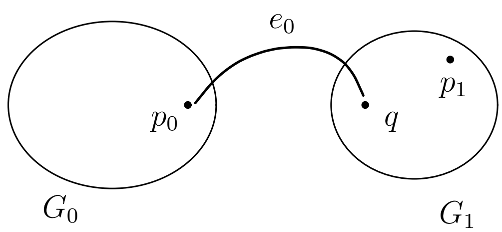
場合 2b: $q \neq p_1$ のとき．このときにも，さらに 2 つの場合に分けて考えます:

場合 2bα**:** G' が連結なグラフの場合．



G' は辺の数が k で，q と p_1 を次数が奇数となっている 2 つの頂点として持つグラフなので，帰納法の仮定から，G' の一筆書きで q から始まって p_1 に終るものが存在します．したがって，e_0 を通って p_0 から q に行く一画をこの一筆書きの前につけたすことで，p_0 から始まって p_1 に終る G の一筆書きが得られます．

場合 2bβ**:** G' が連結でない場合．



この場合には，G' は p_0 を含む連結なグラフ G_0 と q を含む連結なグラフ G_1 に分割されます．さらに場合 1b でと同様な議論により，p_1 は G_1 に含まれることがわかります．特に，G_0 はすべての頂点の次数が偶数になっている辺の数が k 以下の連結グラフで，G_1 は，q と p_1 の次数が奇数で他の頂点の次数は偶数であるような，辺の数が k 以下の連結グラフになっています．したがって，帰納法の仮定から G_0 の一筆書き P_0 で p_0 に始まって p_0 に終るものが存在し，G_1 の一筆書き P_1 で q に始まって p_1 に終るようなものが存在します．ここで，p_0 を出発して P_0 をなぞって p_0 にもどり，次に e_0 を通って p_0 から q へ行き，P_1 をなぞって q から p_1 へ行くというパスは G の p_0 から p_1 への一筆書きになっています．

以上で，すべての場合について，(1.24) で求めていた性質を持った G の一筆書きが存在することが示せたので，ここでの帰納法のステップの証明が完了しました．したがって，（帰納法により） (1.24) がすべての自然数 n に対して成り立つことが証明できたので，これによって定理も証明されたことになります． （証明終）

1.8 背理法

ピタゴラス派のヒッパソスによって最初に発見されたと考えられている次の無理数の存在定理のユークリッドによる証明は，背理法による証明の典型的なものの一つと言えるでしょう: 最初の不可能性命題の証明の一つとなっていると言えます（ユークリッドによる

と言われるこの証明はヒッパソスより 100 年くらい後の時代のもののようです）．有理数とは，分数として表される数でした．

定理 7 （ヒッパソス，紀元前 6 世紀?）$\sqrt{2}$ は有理数でない．

証明． （ピタゴラス） 背理法で示します．つまり，ある整数 p, q に対して，

(1.25) $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

とできたと仮定して，この仮定から矛盾が導かれることを示します．

必要なら約分した結果で置き換えられるので，$\frac{p}{q}$ は既約分数表現になっていると仮定できます．(1.25) の両辺を二乗して移項すると

(1.26) $q^2 = 2p^2$

となります．この右辺は 2 の倍数になっているので，左辺も 2 の倍数ですが，そのためには q も 2 の倍数でなければならないことがわかります．したがって，整数 q' で $q = 2q'$ となるものがとれます．この式を (1.26) に代入して両辺を 2 で割ると，

(1.27) $2q'^2 = p^2$

となるので前と同様に p は 2 の倍数であることが結論できます．したがって，分数表現 $\frac{p}{q}$ は 2 で約分できることになりますが，これは，$\frac{p}{q}$ が既約分数表現になっていることに矛盾です． （証明終）

[ここはまだ書きかけです]

1.9 ほしいものは作ってしまう

[ここはまだ書きかけです]

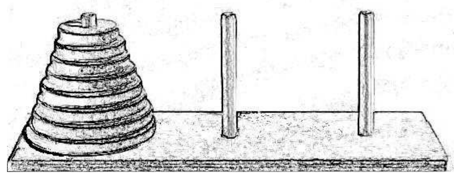
2 数学的帰納法による証明の例の補足

第 1.7 節ではケーニヒスベルクの橋の逆問題の証明で帰納法が用いられていました．この証明は少し長かったので，証明の全体像が見渡しにくくなっていたかもしれません．そこで，ここでは，第 1.7 節の補足として，もう少しコンパクトな数学的帰納法の例として，ハノイの塔の問題と，エルデシュの定理（定理 9）の証明を見てみることにしたいと思います．

ハノイの塔は，フランスの数学者ルカ (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891) の発明したパズルです．

このパズルでは，最初に三本のポールが立った台座のうちの一本のポールに，ポールに通すためのための穴が中心に開いている，大きさの違う n 枚の円盤が，大きいほうか

ら順につまれています（後で議論のしやすいようにこのようなものをサイズが n のゲーム盤と呼ぶことにします）.



8 個の円盤を持つハノイの塔

このように積上げられた円盤のことをハノイの塔とよぶことにして，ゲームの問題は，次のルールに従ってハノイの塔を別のポールに移すことができるか? というものです:

(2.1)　一度に移動できるのは一つの円盤で，あるポールに積まれた円盤のうちの一番上のものを他のポールのどちらかに移動することができる.

(2.2)　円盤の移動先のポールは，円盤が 1 つも積まれていないか，すでに積まれているのは移動する円盤より大きいサイズの円盤だけのときに限る.

実は，n をどうとっても，この規則に従って n 個の円盤からなるハノイの塔を他のポールに移すことができることを n に関する帰納法で証明できます:

定理 8 すべての自然数 n について，サイズが n のゲーム盤のハノイの塔を，(2.1) と (2.2) に従って別のポールに移動することができる.

証明.　n に関する帰納法で証明します. $n = 0$ のときには，主張は vacuously に成立ちます（“vacuously” という言い方については，脚注 15) を参照してください）.

したがって，ある自然数 k に対して定理の主張が $n = k$ としたときに成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ に対しても定理の主張が成り立つことが示せれば，帰納法による証明が完了したことになります.

そこでサイズが $k + 1$ のゲーム盤を考えます. このポールを左側から一番，二番，三番と呼ぶことにして，一番のポールに $k + 1$ 個の円盤からなるハノイの塔が置かれているとします. 今，円盤のうち一番下にあるものを除外して，他の k 個の円盤を考えると，一番下の円盤は，これらの k 個の円盤のどれよりも大きいので，他の円盤に対して (2.2) による制約は全く与えないことがわかります. したがって，帰納法の仮定から，一番下の円盤以外の k 個の円盤からなるハノイの塔を，たとえば三番のポールに (2.1) と (2.2) に抵触せずに移動することができます. ここで，一番下の円盤を一番のポールから二番のポールに移動した後，三番のポールに積まれている k 個の円盤を，ふたたび帰納法の仮定を用いて (2.1) と (2.2) に抵触しないように二番のポールの一番大きな円盤の上に積上げれば，全体として一番のポールから二番のポールへの $k + 1$ 個の円盤の移動ができたことになります.　（証明終）

次の定理はエルデシュ (Paul Erdős, 1913–1996) が 1943 年に証明した定理です:

定理 9 (P. Erdős, 1943) 平面上に n 個の同一直線上にない点をとると，これらの点の（少なくとも）2 点を通るような直線が n 本以上存在する．

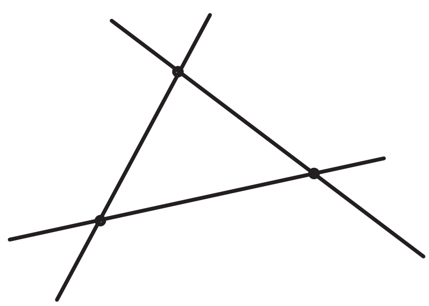
エルデシュの上の定理の証明は，次に述べるシルベスター (James Joseph Sylvester, 1814–1897) が 1893 年に提起した問題（定理 10, ただしエルデシュは，シルベスタがこの問題を既に提起したことを知らずに，独立に問題を再提起しているようです）が肯定的に解けるとすると証明できる，という形の不完全なものでした．この問題はガライ（Tibor Gallai, 1912–1992）が 1944 年に肯定的に解いているので[16)]，今日では Gallai-Sylvester の定理，または Sylvester-Gallai の定理などと呼ばれています．

定理 10 (Gallai-Silvester の定理) 平面上，一直線上にないような有限個の点の集まり $\mathcal{P}$ をとると，$\mathcal{P}$ の要素のうちの 2 点で，その 2 つを結ぶ直線が，$\mathcal{P}$ の他のどの点とも交わないようなものが存在する．

まず，定理 10 を仮定して，定理 9 を証明してみましょう．3 個未満の点は必ず同一直線上にあるので，$n \geq 3$ としてよいことに注意しておきます．

$n \geq 3$ となるすべての整数 n に対し，同一直線上にない n 個の平面上の点を任意にとるとき，これらの少なくとも 2 つを通るような直線が n 本以上存在することを，n に関する帰納法で示します．

まず帰納法のはじめですが，$n = 3$ とすると，同一平面上にない 3 点は三角形の頂点をなすので，それらのうちの 2 点づつを通る 3 つの直線がひけます．したがって，$n = 3$ のときには，定理は成り立つことがわかります．



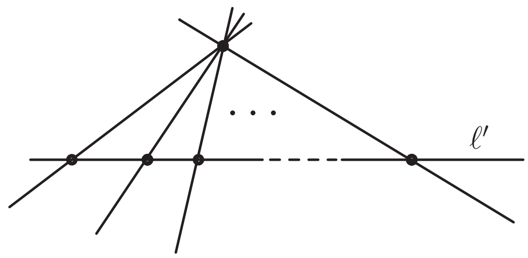
したがって，あとは帰納法のステップを証明すればよいことになります．$n = k \geq 3$ とするとき定理の主張が成り立つことを仮定して，$n = k + 1$ に対しても定理の主張が成り立つことを示します．

平面上，同一直線上にない $k + 1$ 個の点をとります．このとき，定理 10 により，これらのうちの 2 点 p, q で，p と q を通る直線 ℓ が，これらの $k + 1$ の点のうちの他の点を通らないようなものがとれます．2 つの場合に分けて考えることにします:

場合 1. p 以外の k 個の点はすべて同一直線上にあるとき．この場合には，仮定から p は k 個の点が乗っている直線 ℓ' 上にないので，p と k 個の点を結ぶ k 個の直線と ℓ' を

16) “否定的に解いた” という言葉遣いについては 18 ページの脚注 12) を参照してください．

合わせた合計 $k+1$ 個の直線がとれることになり，帰納法のステップが成り立ちます．



場合 2. p 以外の k 個の点が同一直線上にないとき．このときには，帰納法の仮定から，これらの k 個の点のうちの 2 点以上を通る直線が k 本とれます．これらの直線は p と q 以外の点を少なくとも一つは含んでいるので，ℓ とは異なります．したがって，これらの k 本の直線と ℓ をあわせた $k+1$ 本の直線がとれることになり，この場合にも帰納法のステップが成立ちます．

以上の場合 1. と場合 2. をあわせると帰納法のステップが証明できたことになり，定理の証明が完了しました．　（証明終）

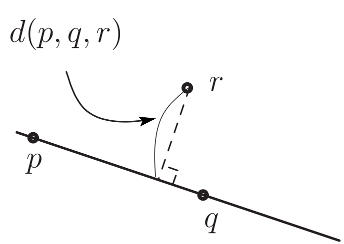
最後に定理 10 の証明を見てみることにしましょう．この定理は Sylvester が問題として提出してから，50 年以上も解けなかった問題ということなので[17]，証明は大変難しいのではないかと思ってしまうかもしれません．しかし，次に見るように，ちょっと思いつかないアイデアが使われてはいますが，そこで使われている数学的な道具立ては，中学生でも理解できるような初等的なものだけです．

定理 10 の証明: $\mathcal{P}$ を平面上の同一直線上にない有限個の点からなる集合とします．

$$T=\{(p,q,r) : p,q,r\in\mathcal{P},\ p,q,r \text{ は同一直線上にない}\}$$

とすると仮定から $T\neq\emptyset$ です[18]．$(p,q,r)\in T$ に対し，

$$d(p,q,r)=p \text{ と } q \text{ を通る直線 } \ell \text{ と } r \text{ の距離}$$



とします．ただし，直線 ℓ と点 r の距離とは，r から直線 ℓ に下した垂線の長さとしま

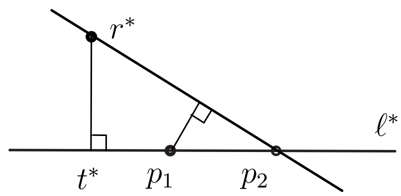
[17] 実は，この定理と実質的に同じ定理を Melchior という人が 1940 年に解いているということですが，これが最初の証明としても，47 年間解けないでいた，ということになります．

[18] $\emptyset$ で要素を一つも持たない集合（空集合）をあらわします．したがって，$T\neq\emptyset$ は“T は少なくとも一つは要素を持つ” という意味です．

す．$\mathcal{P}$ は有限なので，T も有限です．したがって，T の要素 (p^*, q^*, r^*) で，$d(p^*, q^*, r^*)$ が $d(p, q, r)$, $(p, q, r) \in T$ のうちで最小になるようなものがとれます[19)]．

ここで，p^*, q^* が求めるような性質を持っていること，つまり，p^* と q^* を通る直線 ℓ^* が $\mathcal{P}$ の他のどの点も通らないことが示せれば，定理の証明ができたことになります．

ふたたび背理法で証明します．ℓ^* 上に p^*, q^* 以外の $\mathcal{P}$ の点があるとして，そのようなものの一つを s^* とします．このとき，p^*, q^*, s^* のうち，少なくとも 2 つは ℓ^* に r^* から下した垂線の足 t^* の同じ側にあるので，それらを t^* から近い方から，p_1, p_2 と呼ぶことにします．



このとき上の図から明らかなように，$d(p^*, q^*, r^*) > d(r^*, p_2, p_1)$ となりますが，これは，$d(p^*, q^*, r^*)$ の最小性に矛盾です． （証明終）

3　幾何学的直観と代数的直観

人間の脳の使い方には，いくつかの異なるモードがあるようです．大脳と小脳の役割分担については昔から知られていましたが，最近では，右脳と左脳の違い，という話を耳にすることもあります．曰く，左脳は論理をつかさどり，右脳は直観をつかさどる．もちろん，これは右ききの人の場合でしょう．私はかなり純粋な左ききなので，もしこのような役割分担があるとすると，私の場合には右脳が論理的な思考に加担して左脳が直観をつかさどる，ということになっているのではないかと思います．ただし，脳の機能の分布は実際にはもっとずっと複雑で，右脳左脳と明快に分類してしまうのは少し早計すぎるようですが．

数学では，いったん何がどうして成り立つのかが判ってしまい，判ったとを整理する段階になると，そこでの作業は，計算や論理演算などによる単純作業が主になることが多いと言えます．数学は計算だ，という根強い誤解もこのへんにあるのでしょう．しかし，何が成り立つのかを予測したり，予測したことが本当に正しいことを証明するためのアイデアをさぐってゆく段階では，あらゆる種類の直観が総動員される必要があります．

[19)] T が有限のときには，T の要素のどれかをとり それを (p_1, q_1, r_1) として，これより小さな d の値をとる $(p, q, r) \in T$ があれば，それを (p_2, q_2, r_2) として，... としてどんどん T の要素をとってゆくと，T の要素の個数以下のステップ数で，$d(p^*, q^*, r^*)$ が最小になるような $(p^*, q^*, r^*) \in T$ に行き着くことができます．

このような議論の進め方は**無限降下法**と呼ばれています．実は，無限降下法は数学的帰納法の一種ととらえることができます．

推理小説の上級者向けの読み方の一つに，作者がどのように読者の意表をつこうとしているのかを考えながら読むというのがあります．数学の教科書を読む読み方にも，理論や証明などを発見した人がどのような考えやイメージからそのような理論や証明を発見したかを考えなが読み進むというやり方が可能で，そのような読み方が成功すると，後で細部を忘れてしまっても，自力で頭の中で理論を再構成することができるようになります．数学の場合は，数学の理論を作る側とできた数学の理論を勉強して理解したり，それを応用する側の差は，推理小説の書き手と読み手の差よりずっと大きいかもしれません．しかし，すでに出来上がった数学の理論を勉強する側に専念する，あるいは，せざるを得ない場合でも，自分がこの理論の作り手だったら，と想像しながら読み進むというスタンスは，理論をより深く理解するために非常に良い方法の一つだと思います．

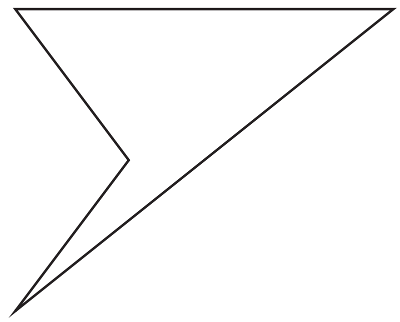
この章の表題にもあるように，数学的直観は大別して 2 つの大きな流れに分類することができそうです．つまり，幾何学的直観と代数的直観ということですが，幾何学的直観が図形や空間に対するイメージを思い浮かべるという精神的能力からくる直観なのに対し，代数的直観は式の変形や論理的操作に対する直観で，この 2 つの対照は，先程話題にのぼった右脳対左脳の対照と対応しているようにも思えます．もしそうだとすると，この 2 つの直観のありかたの違いは我々の脳の生理と直接関連する本質的な違いだという結論も可能なように思えますが，いずれにしても，この幾何学的直観と代数的直観という二分律はすでにギリシャ時代の数学にもはっきりと現われていて，世界最初の体系的な数学の教科書と目されているユークリッドの原論も前半が幾何，後半が代数にあてられていて，その書き方から 2 つの見方がはっきりと異なるものとして認識されているように思えます．

しかも，これらの 2 つの異なる直観のありようは単に遊離しているのではなく，互いに絡みあって補強しあい，より鋭い数学的直観へと，とぎすまされてゆきます．このプロセスは数学の歴史の中に見られるものですが，そのような数学を学んでゆく我々の直観も，ギリシャの時代から現代にいたる数学を学んでゆく過程でとぎすまされてゆくように思えます．

幾何学的直観は，時として驚くべき思考の跳躍を可能にしてくれることがあります．このような例として，ハンガリーの女性数学者エスター・クライン (Esther Klein, 1910–2005) による次の定理の証明を見てみることにします．

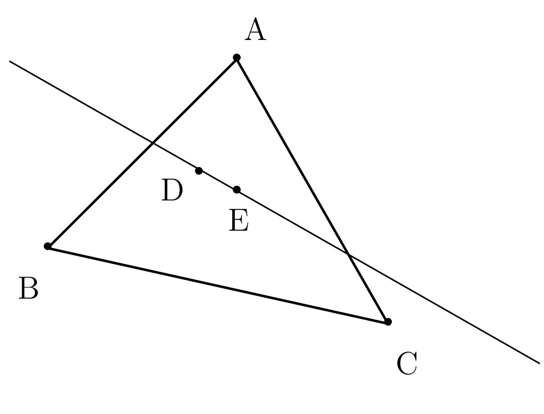
定理 11 （エスター・クラインの定理）平面上に任意の 5 点が与えられて，それらのうちのどの 3 点も同一直線上にないとするとき，それらの 5 点のうちの 4 点をうまく選んで，この 4 点が凸四角形の頂点になっているようにすることがにできる．

凸多角形（凸四角形，凸五角形など）は，直観的には「へこんだ」部分のない多角形のこととですが，これは数学的には，多角形のような閉領域が凸であるということは，その領域の内側にあるどんな 2 点を選んでも，その 2 点をむすぶ線分が多角形の内側に含まれている，という性質として定義できます．三角形はすべて凸です．また，たとえば，



は凸四角形でない四角形の例です．

さて，エスター・クラインの定理は次のような直観的な把握の仕方によってエレガントに証明することができます: 今，定理でのような5つの点が平面上に与えられたとして，平面を板のようなものと思って与えられた5つの点にくぎを打ちつけてその回りにゴム輪をかけることを考えます．このとき，ゴム輪が，3本のくぎにかかる場合と4本のくぎにかかる場合と5本のくぎにかかる場合の3つの場合がありえます[20]．もしゴム輪が4本のくぎにかかっているなら，これらの4本のくぎに対応する4つの点は求めるようなものです．5本のくぎにかかっているなら，そのうちの4本を勝手に選び，それらに対応する4点をとれば，これらは求めるようなものです．もしゴム輪が3本のくぎにかかっているなら，残りの2本のくぎはゴム輪の作る三角形の内側にあります．ゴム輪のかかっている3つのくぎに対応する点をそれぞれ A, B, C, と呼ぶことにしましょう．内側にある2点は D, E, とよぶことにします．5点が，「それらのうちのどの3点も同一直線上にない」という条件を満たすことから，D と E を結ぶ直線は，ゴム輪の作る三角形の三辺のうちの二辺を交差し，外側の三角形の頂点は通らないことがわかります．たとえば，直線 DE を D 側にのばすと AB と交差し，E 側にのばすと CA と交差するとすると，点 B, C, E, D は求めるようなものになっていることがわかります．



（証明終）

演習問題 2 エスター・クラインの定理（定理 11）で “どの3点も同一直線上にない” という条件が実際に必要なことを示してください．

[20] ゴム輪が1本あるいは2本のくぎだけにかかることが不可能なことは明らかでしょう．

[ここはまだ書きかけです]

4　不可能性の証明

「... はできない」，という形の主張を不可能性命題とよぶことにしましょう．たとえば，第 1.6 節では「 ... というグラフは一筆書きできない」という形の主張の証明を見ましたが，これはここで言う不可能性命題の例の一つとなっています．

「... はできる」という形の主張を示すには，どう「... できる」かを例示すればよいわけですが，これに対して，「... できない」を示すには，第 1.6 節で見たように，もっと理論的な考察が必要になることが多いので，数学的にはより面白くなる可能性が大きいとも言えますが，問題の難しさという点で言えば，このタイプの命題の証明の方がより難しくなる傾向があります．

第 1.8 節で述べた無理数の存在定理（定理 7）は，不可能性定理とみなすことができます．定理 7 は

(4.1)　　整数 p, q をとって，$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ とすることはできない

と読みなおすことができるからです．たとえば，“循環小数 $2.\dot{7} = 2.7777\cdots$ は，$\frac{25}{9}$ とあらわせる” という主張は，$\frac{25}{9}$ という分数表現をみつけて，この分数で表される数が，$2.\dot{7}$ と等しくなることを示せば証明できてしまいますが，(4.1) の場合，整数 p, q の組は無限にあるので，それら一つ一つが $\sqrt{2}$ と異なることをチェックしてゆこうとすると無限の時間が必要になってしまいます．定理 7 の証明は背理法を用いるものでしたが，これは今言ったような正攻法で示そうととすると無限に時間がかかってしまうものを有限の長さの証明で，しかもエレガントに示してしまう，という手品のような証明になっているのです．

次の問題は，同じギリシャ時代に提示された古典幾何学の三大問題と言われるものです:

(1)　与えられた正立方体のちょうど 2 倍の体積を持つ正立方体を作れ．

(2)　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作れ．

(3)　与えられた角を三等分せよ．

でも，これは 3 つともあたりまえの簡単な問題のように見えます．(1) については，一辺が a の正立方体の体積は，a^3 ですから，この二倍の体積 $2a^3$ を持つ正立方体は，この値の 3 乗根 $\sqrt[3]{2}a$ を一辺の長さとする正立方体を作ればいいことがわかります．(2) については，半径が r の円板の面積は πr^2 だから，これと同じ面積を持つ正方形としては，この値の平方根 $\sqrt{\pi}r$ を一辺の長さとする正方形を作ればいいわけです．(3)　にいたっては，角の三等分ですから，角の角度が θ なら $\frac{1}{3}\theta$ の角度の角をとればいいわけです．

しかし，実は，上の 3 つの問題での「 $\cdots$ を作れ」は，ギリシャ時代の古典幾何学の文脈では，ただ角度を求めたり辺の長さの値を計算したり，というのとは違った意味を持っ

ていたのです: 実は，この「 ⋯ を作れ」は今の言葉に翻訳すると，「 ⋯ を定規とコンパスだけを普通に許された使い方だけで使って作図する方法を与えよ」という意味だったのです．つまり，上の 3 つの問題は，

(1)' 与えられた正立方体のちょうど 2 倍の体積を持つ正立方体の一辺の長さを，定規とコンパスだけを普通に許された使い方だけで使って作図する方法を与えよ．

(2)' 円の半径が与えられたときこの円と同じ面積を持つ正方形の一辺の長さを，定規とコンパスだけを，普通に許された使い方だけで使って作図する方法を与えよ．

(3)' 与えられた角を三等分する角を，定規とコンパスだけを普通に許された使い方だけで使って作図する方法を与えよ．

と解釈すべきものなのです．実は，(1)'˜ (3)' のすべてに対して，「そのような（一般的な）方法は存在しない」という不可能性が証明されています．しかも，そのことが証明されたのは，(1)' と (3)' については 18 世紀後半，(2)' では 19 世紀後半になってからです．つまり，これらの問題は，人類の歴史の中でおよそ 2400 年から 2500 年あまりにわたって未解決の問題であり続けたわけです．

[ここはまだ書きかけです]

5　数学と無限

[ここはまだ書きかけです: このテーマに関して別の機会に講義した折の講義録として

`http://fuchino.ddo.jp/chubu/infinity-LN.pdf`

がありますので，参照してください．]

6　もっと勉強してみたい人のために

数学について，もっと勉強してみたい人のために，参考書をいくつか紹介しておこうと思います．予備知識がそれほどなくても読めるような本や記事に限ったので，さらに先を勉強したい人は，ここであげた参考書の文献表にあげられている本や記事や論文を読みすすんでください．

References

[1] 秋山 仁，R.L. Graham, 離散数学入門，朝倉書店，(1993).

［秋山 仁はテレビにもよく出てくる有名人です．「幾何学的直観と代数的直観」のところで例としてあげたエスター・クラインの定理はこの本の初めのところにも出ています．］

[2] G. Polya, How to Solve It, Princeton University Press (1945/1957).

[3] 矢野健太郎，角の三等分，ちくま学芸文庫 (1984/2006). [ここはまだ書きかけです]