ベクトル解析 レポート No.2　**担当者: 渕野 昌**　**(2007年12月11日)**
略解と解説

---

1. ベクトル場 $\mathbf{A}(x,y,z)$ とスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ を,

$$\mathbf{A}(x,y,z) = x^2z\,\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\,\mathbf{k},$$
$$\varphi(x,y,z) = \cos(2x+y) + e^{x^2+z}$$

とするとき，次を求めよ:

(1) $\nabla\varphi$,　(2) $\nabla\times\mathbf{A}$,　(3) $\nabla\cdot\mathbf{A}$　(4) $\nabla^2\varphi$　(5) $\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})$

(6) φ の点 (x,y,z) における，単位ベクトル $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ の方向への方向微分係数

2. スカラー場 $\varphi(x,y,z) = xy + e^z$ において，点 $(1,1,0)$ で，この点を通る等位面（つまり $xy+e^z = 2$ を満たす点からなる曲面）に垂直な単位ベクトル（つまり法単位ベクトル）を求めよ.

3. (1) あるベクトル場 $\mathbf{F}$ のポテンシャルとは，$\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ となるようなスカラ場 φ のことだった．$\mathbf{F}$ がポテンシャルを持つとき，$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ となることを示せ.
(2) $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ とするとき，$\mathbf{r}$ のポテンシャルを求めよ.

1.: 略

2.: $\nabla\varphi$ の点 (x,y,z) での値は，点 (x,y,z) を含む φ の等位面に垂直になるのだった（教科書の p.24 定理 3.2 を参照）．したがって，$\dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ (または $-\dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$) の $(1,1,0)$ での値が求めるベクトルである．ここで，$\nabla\varphi = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$ だから，$\nabla\varphi(1,1,0) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ となる．したがって,

$$\left.\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right|_{x=1,y=1,z=1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \qquad \text{または,} \quad -\left.\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right|_{x=1,y=1,z=1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

が求める単位ベクトルである.

3. (1): $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ となっているときには,

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \nabla\times(-\nabla\varphi)\\ &= -\nabla\times(\nabla\varphi) && \text{; 教科書 p.32 の (9) の 1 番目の式で}\\ & && \quad \varphi = -1 \text{ とおいたもの}\\ &= \mathbf{0} && \text{; 教科書 p.32 の (10) の 1 番目の式}\end{aligned}$$

となるから，$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ である.

(2): $\varphi(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{2}z^2$ とすると,

$$\nabla\varphi(x,y,z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} = -\mathbf{r}(x,y,z)$$

となるから，この φ は $\mathbf{r}$ のポテンシャルである.