微分積分 1

ふじの　ゆかり

三浦野　宏

fuchino@diamond.koba-u.ac.jp

講義の webpage

http://fuchino.ddo.jp/koba/

教科書 1

自然数の全体 $\{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}$

natural numbers

整数の全体 integers $\{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots\} = \mathbb{Z}$

Zahlen（ドイツ語 数）

分数の全体 $\left\{\frac{4}{3}, \frac{2}{1}, 0, \cdots -\frac{7}{564} \cdots\right\}$

$\frac{2}{1} = 1$

有理数

rational number

理性的な

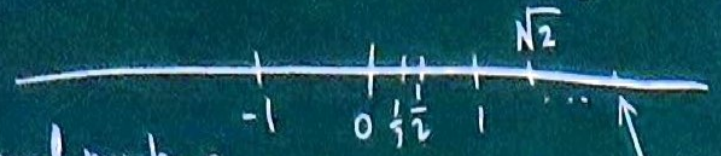
比に関する

$= \mathbb{Q}$

quotients

$x^2 = 2$

分数でない



分数でない

π

real numbers

実数（数直線上のすべての点に1対1で対応する数）の全体 $\mathbb{R}$

区間　$a, b \in \mathbb{R}$　$a \leqq b$ のとき

要素である
element

$\left(\begin{array}{l} a \leqq b \\ \text{と書く} \end{array}\right)$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$

↑ aとbの間の閉集合 (closed set)

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

↖ aとbの間の開集合 (open set)

閉区間
closed

$a = b$ なら $[a, b] = \{a\}$

$(a, b) = \phi$ 空集合(要素をもたない集合)

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$

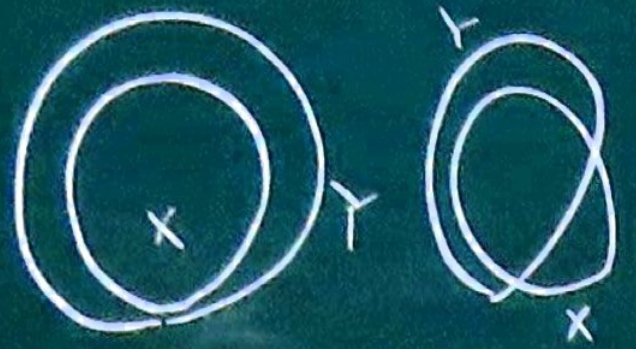
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$

半開集合
(half open set)

集合 X が集合 Y の部分(集合)であるとは、
subset
X のすべての要素が Y の要素であること

これを $X \subseteq Y$ とあらわす

($X \subseteq Y$ とも書く)



$X \subseteq Y$　　$X \subsetneqq Y$

$Y \subsetneqq X$

例

$1 \in \mathbb{N}$ だが $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

複素数の全体 $\{x + iy \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

(complex numbers)

i は $i^2 = -1$ となるような"数"。

$X \subseteq Y$ だが $X \neq Y$ のとき $X \subsetneqq Y$ と書く

$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$ である

1.1.2 数列 sequence (of numbers)

$a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n \qquad n \in \mathbb{N}$

$a_n \in \mathbb{R}$ という形の列を数列と考える

これを $\{a_n\}$　$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ などとあらわす。

$n < m$ なら $a_n \leq a_m$ となっているような数列を

単調増加であるという
(monotone increasing)

例 (1) $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ とすると　　$a_n \to \infty$

$\{a_n\}$ は単調増加である

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ とすると

$\{a_n\}$ は単調増加である　　$a_n < 1$

$a_n \longrightarrow 1$

数列 $\{a_n\}$ が n を大きくするとき ある
(ある決まった) 数 α に どんどん近づくとき

α は数列 $\{a_n\}$ の 極限 (lim.t) といい このことを
である

$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ $\left(\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n\right)$ と書く.

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても ある自然数 n_0 をとると
これから先 つまりすべての $n \geq n_0$ に対して,

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ できる.

ε error 誤差

(*) 実数(の全体)の連続性

任意の単調増加な数列 $\{a_n\}$ に対し、$\{a_n\}$ が上に有界(つまりある実数 r に対して $a_n < r$, $n \in \mathbb{N}$ となる)なら、$\{a_n\}$ は極限を持つ。

実数の全体 $\mathbb{R}$ は、① $\mathbb{Q}$ と同様の四則演算が成立し、② $\mathbb{Q}$ がその中に稠密(ちゅうみつ)に(部分集合として)含まれていて(どんな実数 $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ に対しても $a < q < b$ となる $q \in \mathbb{Q}$ が存在する —

このことがすべての実数無限小数表示によってあらわされることがわかる)

③ (*) の意味の連続性を持つことで特徴づけられる。

関数、関数の連続性　　函数

集合 X, Y が与えられていて、f が X の1つの要素にある Y の要素を対応させるものになっているとき f を X から Y への関数 (function) であるといい $f: X \to Y$ と書く。