Timeline

6月8日 定期試験
90分 (持ち込み可)

- 5月19日から5月25日の間に講義のweb page にレポート演習問題をupload.
- 6月1日にレポート提出.
- 5月25日から6月1日の間に定期試験の予想問題集をupload

補足

数列 $\{a_n\}$ に対し，すべての $r \in \mathbb{R}$ に対して
(十分に大きな) $n_0 \in \mathbb{N}$ をとると，すべての $n > n_0$ に対し
て，$a_n > r$ ($<$) となるとき，$\{a_n\}$ は ∞ ($-\infty$) に発散する (diverge)
といい これを $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と書く

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く

f を関数として ($a \in \mathrm{dom}(f)$) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対して ある $\delta > 0$ が
とれて，すべての $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathrm{dom}(f)$ $x \neq a$ に対
して，$f(x) > r$ ($<$) となるとき，

$-\infty$ $\mathbb{R}$ ∞

a

f は $x \to a$ で ∞ ($-\infty$) に発散するといい これを

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ($-\infty$) と書く

$\lim_{n\to\infty} a_n$ や $\lim_{x\to a} f(x)$ が $\infty, -\infty$ 以外の値をとるとき，これらは有限の値に収束するという。

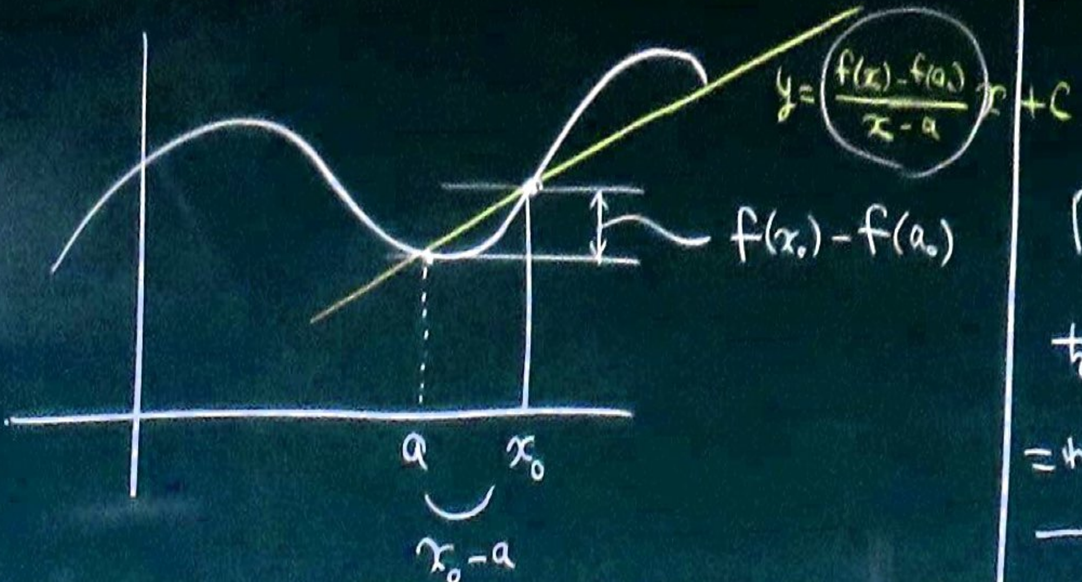
bounded

2.1 微分可能性

関数 $f: D \to \mathbb{R}$ に対し，$a \in D$ として a での f の値の
"瞬間変化率" を (うまく定義できるとき) f の a での
微分係数 (differential coefficient) という つまり，

$$(*) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき，この極限を微分係数とよぶ



$h=x-a$ とおくと, $x\to a \iff h\to 0$ で $x=a+h$

である これを用いると

$$(※)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{と書ける.}$$

I を区間とするとき すべての $a\in I$ に対し

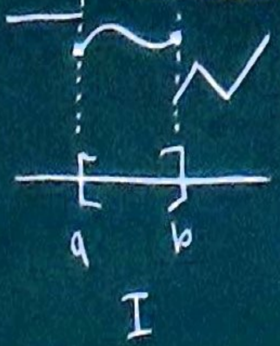
$f|I$ の a で微分係数が存在するとき

関数 $g: I\to \mathbb{R};\ x\longmapsto$ $f|I$ の $\underbrace{\quad}_{x\text{での}}$ 微分係数

を f の I での導関数 (derivative) という.

これを $\boxed{f'(x),\ \dfrac{d}{dx}f(x),\ \dfrac{df}{dx}(x),\ D(f),\ \dot{f}}$ などで書く

I の内点では f の微分係数



I が $\overset{右}{左}$ 端点を含むときは, f の $\overset{右}{左}$ 側導関数

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

-0

$0+0$

例2.2 $a>0$ $a\neq 1$ のとき $\frac{d}{dx}a^x$ を計算する

$a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ の導入

$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{コ}}$ $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$

$a^n > 0$

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ $(a^n)^m = a^{nm}$

この式が成り立つようにべき乗を $\mathbb{R}$ に拡張する.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $m \in \mathbb{N}$ とする. $a^n : \mathbb{Z} \to (0,\infty)$

$m \neq 0$ $n, m \in \mathbb{Z}$ のとき

この定義はうまくできる ($\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \Rightarrow \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m']{a^{n'}}$)

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ とする. $a^q : \mathbb{Q} \to (0,\infty)$

すべての実数 r に対し $\lim_{n\to\infty}\{q_n\} = r$ となる有理数列 $\{q_n\}$ をとり,

$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ と定義する この定義もうまくできる

(well-defined である) $\lim_{n\to\infty}\{q_n\} = r = \lim_{n\to\infty}\{q_n'\}$ のとき,

$\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n'}$ である.

以上により, $a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$; $x \longmapsto a^x$ が定義される

a^x は連続である.

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$ (*)

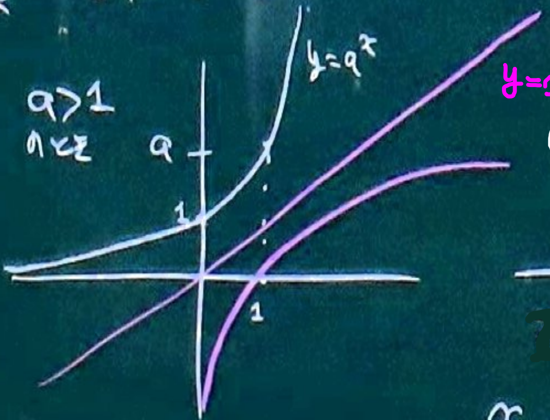
である. たとえば (*) は $\lim_{n\to\infty} q_n^1 = x_1$ $\lim_{n\to\infty} q_n^2 = x_2$ q_n^1 $q_n^2 \in \mathbb{Q}$

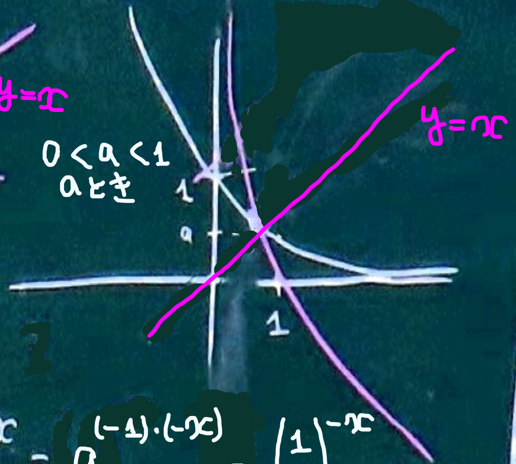
のとき,

$a^{x_1+x_2} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n^1+q_n^2} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n^1} \cdot a^{q_n^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} a^{q_n^1} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{q_n^2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

定理1.2(3)

また関数 $x \mapsto a^x$ は連続で $a>1$ のときには真に増加で $0<a<1$ のときには真に減少である





$$a^x = a^{(-1)\cdot(-x)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

a^x の値域は $(0, \infty)$

(a^x の値の変化 $\underbrace{\lim_{x\to\infty} a^x = \infty}_{a>1\text{のときは}}$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ と a^x 連続性から)

+前回やった中間値の定理

a^x の逆関数を $\log_a y$ と書いて、

$\log_a(\cdot) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$; $y \mapsto \log_a y$

$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{a^{x+h}}^{a^x a^h} - a^x}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{= \log_e a}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+x)^x$$

↑ $x \mapsto (1+x)^x$ は単調増加だからより

すべての ε に対し(十分に大きな $x_0 \in \mathbb{R}$ をとるとすべての $x \in (x_0, \infty)$ に対し,

$f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ となるとき

$f(x)$ は $x \to \infty$ で b に収束するといい

このことを $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ と書く。

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ も同様に定義する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\log_e a \quad \text{を示す}$$

このためには、

(1) $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{a^h-1}{h}=\log_e a$ と

(2) $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{a^h-1}{h}=\log_e a$

を示せばよい。

(1): $a^h-1=\frac{1}{t}$ とおく　$h\to+0 \iff t\to\infty$

で　$a^h=\frac{1}{t}+1$

$$h=\log_a(a^h)=\log_a\left(\frac{1}{t}+1\right)$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)}\overset{ⓐ}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$$

連続関数 a^x の逆関数だから 連続

$$=\frac{1}{\log_a\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}\overset{ⓑ}{=}\log_e a$$

(2)も同様に示せる。

ⓐ:

$$c\log_a b = \log_a b^c$$

両辺を a の背にのせると

左辺 $a^{c\log_a b} = (a^{\log_a b})^c = b^c$

右辺 $a^{\log_a b^c} = b^c$　ここで $a^{\cdot}$ は 1-1 なので

$$c\log_a b = \log_a b^c$$

ⓑ:

$a,b>0$ [redacted] なら

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

証明: $ab=1$ のときは,

$\log_a b = \log_a \frac{1}{a} = -1$

$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b \frac{1}{b}} = \frac{1}{-1} = -1$

だからよい.

$ab \neq 0$ とする ↗

↗ $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ を示せばよい

左辺 を ab の肩に乗せてみる

$ab^{\text{右辺}} = ab^{\log_a b \log_b a} = a^{\log_a b \log_b a} \cdot b^{\log_a b \log_b a}$

$= (a^{\log_a b})^{\log_b a} \cdot (b^{\log_b a})^{\log_a b}$

$= b^{\log_b a} \cdot a^{\log_a b} = ab$　ここで $ab \neq 1$ が必要となる

一方 $ab^1 = ab$ で $ab^{(\cdot)}$ は 1-1 関数だから, $\log_a b \log_b a = 1$ である.