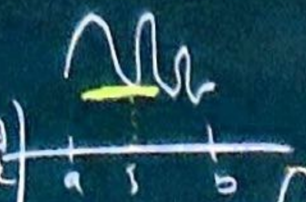
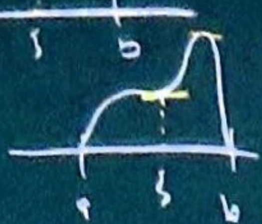
Recap: 定理 2.8 (Rolleの定理)

f は $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能で $f(a)=f(b)$ とするとき $a<\xi<b$ で $f'(\xi)=0$ となるようなものが存在する.

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/biseki-1-06-2017-05-25.pdf

定理2.13 (Cauchyの平均値定理)





f, g は $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能とする.

$g(a) \neq g(b)$

☆ f' と g' が同時に 0 になるような $x\in(a,b)$ は存在しない.

このとき $a<\xi<b$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となるものが存在する.

証明 $[a,b]$ 上の関数 F を次のようにして定義する:

$x\in[a,b]$ に対し

$$F(x) = (f(x)-f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

とする.

$$F(a)=0$$

$$F(b) = (f(b)-f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\cancel{(g(b)-g(a))}$$

$$=0$$

したがって Rolleの定理より, $a<\xi<b$ で $F'(\xi)=0$ となるものが存在する.

この ξ が求めるものである: $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ だから,

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$　$1! = 1$

また $0! = 1$ とおく

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = F'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(g(b)-g(a)\right) f'(\xi) = \left(f(b)-f(a)\right)\cdot g'(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

ここで $f'(\xi)$ と $g'(\xi)$ の少くとも一つは0でないので，
$f'(\xi) \neq 0$　$g'(\xi) \neq 0$ である．

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)} .$$

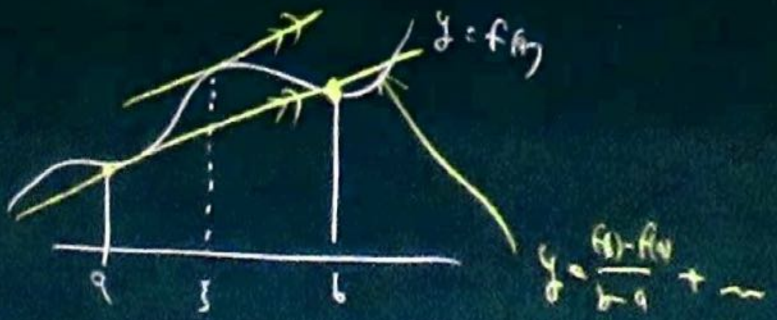
⊠

平均値の定理は上の定理からすぐに出る：

定理 2.9 (平均値の定理)

f は $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする．$a < \xi < b$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



証明　$g(x) = x$ とすると f と g に Cauchy の定理が応用できる ($g'(x) = 1$ なので☆は満たしている．

ξ を Cauchy の定理でのようにとると

$$\frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{b-a}_{= g(b)-g(a)}} = \frac{f'(\xi)}{\underbrace{1}_{= g'(\xi)}}$$

となるから．

⊠

Taylorの定理

fの導関数の導関数を $\underbrace{f'',\ \dfrac{d^2f}{dx^2},}_{\text{fの2次導関数という}}\ D^2(f)$ などで

あらわす。

fの $\underbrace{\text{導関数の導関数の}\cdots\text{の導関数}}_{n\text{回}}$ を

fのn次導関数（n th derivative）とよび これを

$$f^{(n)},\ \frac{d^nf}{dx^n},\ D^n(f)$$

などと書く 特に $f^{(1)}=f'$ $f^{(2)}=f''$ だが、$f^{(0)}=f$ とする。

fがn回微分可能で $f^{(n)}$ が連続のとき、fはC^n-級である

という。微分可能なら連続なので、fがC^n-級で、

$m<n$ なら fはC^m-級でもある。

fが何回でも微分可能なとき、gはC^∞-級である。

という。

定理（Taylorの定理） 7.14 fを区間Iでn回微分可能

なら、$a, b \in I$（$a<b$ または $b<a$）に対し

aとbの間の点 ξ（$a<\xi<b$ または $b<\xi<a$）で

次を満たすものが存在する。

$$f(b)=\boxed{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)^1+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots \cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

ξ は n に依存することに注意する

を $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(b-a)^k$ と書く

Σ	sigma
和	summa
Π	pi
積	productum

証明　のこり rest

$$R_n = \underline{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(b-a)^k}$$

とする。示すべきは、$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$ となる ξ が a と b の間に存在することである

a と b の間の x（ただし $x=a$ $x=b$ も含める）に対し、

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$$ とする

$$F(a) = \underline{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(b-a)^k} = R_n$$

$$F(b) = f(b) - \Big(f(b) + \underset{=0}{(b-b)} (\cdots) \Big)$$

$$= 0$$

$$\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \right)' = \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}$$

$k \geqq 1$ に対し

だから、

$$F'(x) = -\cancel{\frac{f^{(1)}(x)}{0!}} - \cancel{\frac{f^{(2)}(x)}{1!}(b-x)^1} + \cancel{\frac{f^{(1)}(x)}{0!}} - \cancel{\frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2} + \cancel{\frac{f^{(2)}(x)}{1!}(b-x)^1} - \cancel{\cdots}$$

$$- \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \cancel{\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2}} = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

ここでaとbの間のxに対し、

$g(x)=(b-x)^n$ とおくと, Cauchyの定理により,

aとbの間にあるξで

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となるものがある.

$$\frac{\cancel{-}R_n}{\cancel{-}(b-a)^n} = \frac{\cancel{-}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\cancel{(b-\xi)^{n-1}}}{\cancel{-}n\cancel{(b-\xi)^{n-1}}}$$

$$((b-x)^n)' = -n(b-x)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_n}{(b-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\Leftrightarrow R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n \quad /\!/$$

☒

Taylorの定理で, bをxと書きなおすと,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

$(\xi = a+\theta(x-a)$ for some $0<\theta<1)$

さらにここで $a=0$ とおくと,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)x^n$$

(Maclaurinの定理) $(\xi = \theta x$ for some $0<\theta<1)$

応用

$f(x)=e^x$ と限ると　$f^{(n)}(x)=e^x$ となるので

$$e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \cdots + \frac{e^0}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^\xi}{n!}x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$e = 2.71828\cdots$ だが,

$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} = 2.708\cdots$ となる.

$$C^n_k \left(= {}_nC_k\right) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$(fg)'' = f'g' + fg'' + f''g + f'g'$$
$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$\vdots$

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + \underline{2}ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + \underline{3}a^2b + \underline{3}ab^2 + b^3$$

Leibniz の公式

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C^n_k\, f^{(n-k)} g^{(k)}$$