微分積分学2

浅野晃（Akira Asano）

http://fuchino.ddo.jp/kobe/

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

定積分

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

function　　関数の全体 real numbers

または、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$　$a, b \in \mathbb{R}$

$(a, b) \to \mathbb{R}$　$a = -\infty$　$b = \infty$ も考える

に対して、$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が

ある とき、　F の微分　$\frac{d}{dx}F(x)$ と書く　$(\Omega = r)$

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数（Umfunktion（独））とよぶ

例　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin(2x)$ とすると、

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ は $f(x)$ の原始関数の1つである。

たとえば $F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + 1573$ としても $F_1(x)$ も

$f(x)$ の原始関数である。

定理（平均値定理の応用）微分可能な関数 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

で すべての $x \in \mathbb{R}$（要素）に対して $G'(x) = 0$ となるときには、G は

定数関数である。

今、$F_0(x)$ と $F_1(x)$ が ともの $f(x)$ の原始関数とすると、

$F_0'(x) = f(x)$　$F_1'(x) = f(x)$ となるから、

$G(x) = F_1(x) - F_0(x)$ とすると、

$G'(x) = (F_1(x) - F_0(x))' = F_1'(x) - F_0'(x)$

$= f(x) - f(x) = 0$

したがって $G(x)$ は定数関数であるたとえば

$G(x) = C$ とすると　$F_1(x) - F_0(x) = C$ だから、

$F_1(x) = F_0(x) + C$ である。つまり、

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると、

$f(x)$ の（任意の）原始関数はすべて、

$F(x) + C$ の形であらわせる。　indefinite integral of f

この（$f(x)$ の）原始関数の一般形を $f(x)$ の不定積分

とよんで　$\int f(x)dx$（または、$\int f(t)dt$ …など）

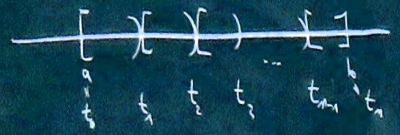
であらわす。

インテグラルの S から生まれた記号 ライプニッツの導入した記号

Summa（ラ）和

定積分 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($f:[a,b]\to\mathbb{R}$ でよい)

が定められたとき、区間 $[a,b]$ を有限個の区間に分割することを考える



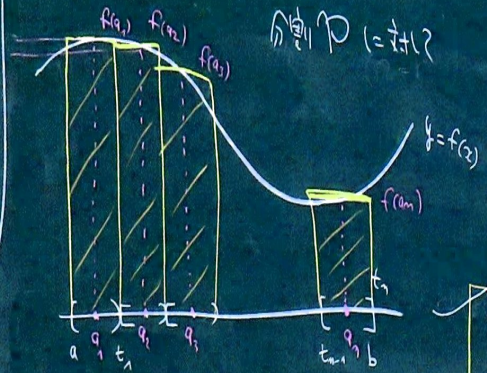
$[t_0, t_1), [t_1, t_2), \cdots, [t_{n-1}, t_n]$ ($t_0 = a$, $t_n = b$)

これらの分割の1つ1つからある点 $a_1, \cdots, a_n$ をとってくる

$t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 \cdots < t_{n-1} < a_n < t_n$ ($t_0 = a$, $t_n = b$)

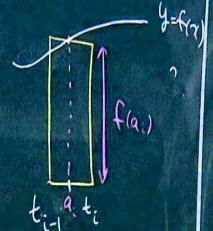
これらをあわせたものを分割と呼ぶことにする

partition

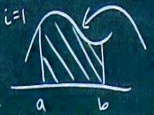


分割 P に対して

$$S_P^f = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(t_i - t_{i-1})$$



とおくと S_P^f は



この面積の近似と考えることができる。

$P\to 0$ で分割をどんどん細かくする

ようすをあらわすことにして、極限

$$\lim_{P\to 0} S_P^f$$

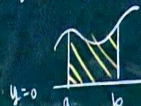
が存在するとき これを

(P は $[a,b]$ の分割)

$f(x)$ の a から b までの定積分とよび

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{または } \int_a^b f(t)\,dt \ \cdots \text{など}\right)$$

であらわす。$f(x)>0$ のときにはこれは



の面積をあらわしていると考えられる。

定理 $f(x)$ が連続関数なら、$\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する

補足 $f(x)$ が積分可能とすると

$b<a$ のときには

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定義する。

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

証明 ($a<b<c$ の場合を考える)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \lim_{P_1\to 0} S_{P_1}^f + \lim_{P_2\to 0} S_{P_2}^f = ?$$

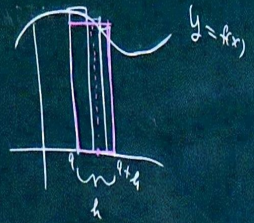
(P_1 は $[a,b]$ の分割、P_2 は $[b,c]$ の分割)

② $[a,b]$の分割と$[b,c]$の分割を合わせたものは$[a,c]$の分割になるので

$$= \lim_{\substack{P\to 0 \\ P\text{は}[a,c]\text{の分割}}} S_P^f = \int_a^c f(x)\,dx \quad \square$$

補題3 $f(x)$を連続関数とするとき

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = f(a)$$



$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \xrightarrow{h\to 0} h\,f(b) \quad (b\in(a,a+h))$$

$f(a)$

補題3

定理（微分積分学の基本定理）fを積分可能な関数としてaはfの定義域に入っている数として

$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ とすると

$F'(t)=f(t)$ となる

証明

$$F'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx\right)$$

補題2

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

$$= f(t) \quad \square$$

系5（定積分の計算法）fが積分可能なとき

$F(x)$を$f(x)$の原始関数の1つとすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \left(= \left[F(x)\right]_a^b\right)$$

系6 連続関数には原始関数が存在する

cf. 微分可能な関数の微分は連続とは限らない

証明 定理6から、$\int_a^t f(x)\,dx = F(t)+C$

となっていることで $t=a$を代入すると

$0=\int_a^a f(x)\,dx = F(a)+C$ となるから、$C=-F(a)$

(以上)より $\int_a^t f(x)\,dx = F(t)-F(a)$ $t=b$を代入して

補題2 $f(x)$が積分可能とすると $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ $\square$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

証明（$a<b<c$の場合を考えて

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \lim_{\substack{P_1\to 0 \\ P_1\text{は}[a,b]\text{の分割}}} S_{P_1}^f + \lim_{\substack{P_2\to 0 \\ P_2\text{は}[b,c]\text{の分割}}} S_{P_2}^f = ②$$