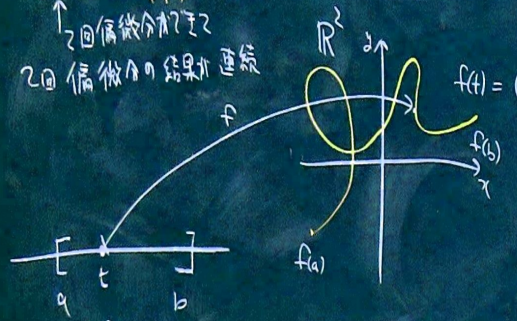
曲線の長さ, 曲面の面積

curve

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の曲線を区間 $[a, b]$ から $\mathbb{R}^2$ への C_2-級の関数 f として考えることにする.

↑ 2回偏微分ができて

2回偏微分の結果が連続



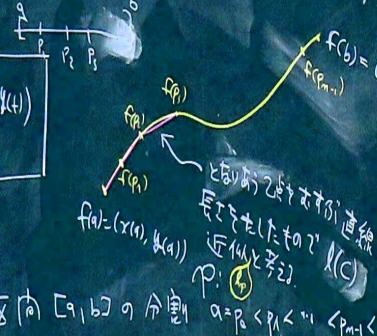
時間と考える

time

$$C : \{ (\overset{f(t)}{x(t), y(t)}) \mid a \le t \le b \}$$ に対して

C の長さ $l(C)$ を定めたい!

$$l(C) = \lim_{|P| \to 0} l_P$$



とおいたのでよりおおきい直線の長さをたしたもので $l(C)$ の近似と考える.

P: l_P

区間 $[a, b]$ の分割 $a = p_0 < p_1 < \cdots < p_{m-1} < p_m = b$ を考えて, 平面上の点 $f(a) = f(p_0), f(p_1), f(p_2), \cdots, f(p_{m-1}), f(p_m) = f(b)$

対応する

$$l_P = \sum_{i=1}^{m} |f(p_i) - f(p_{i-1})| \qquad |P| = \max\{|p_i - p_{i-1}| : 1 \le i \le m\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x(p_i) - x(p_{i-1}))^2 + (y(p_i) - y(p_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x'(p_i)(p_i - p_{i-1}))^2 + (y'(p_i)(p_i - p_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x'(p_i))^2 + (y'(p_i))^2}\, |p_i - p_{i-1}|$$

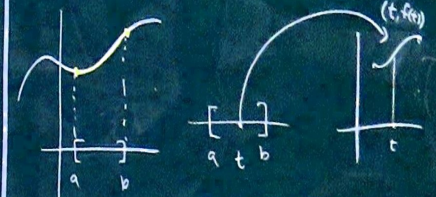
$|P| \to 0$ では

$$\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

曲線

C がある関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ とあらわされているときには,

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$



と見ると, $l(C) = \int_a^b \sqrt{(1)^2 + (f'(t))^2}\, dt$

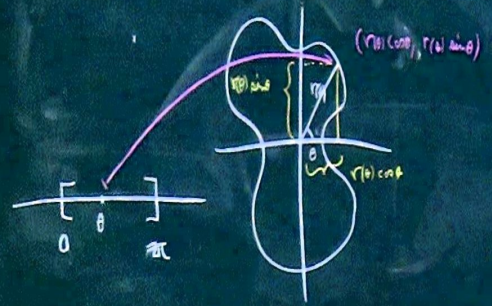
$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\, dt$$

ある $r:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$

に対して、

$C:\{(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\mid 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ として曲線 C が

与えられているときに、



このとき ⊛ から

$$\ell(C)=\int_0^{2\pi}\sqrt{((r(\theta)\cos\theta)')^2+((r(\theta)\sin\theta)')^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r')^2\cos^2\theta+(r')^2\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

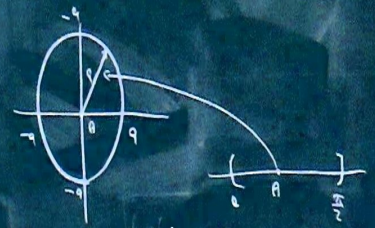
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\theta$$

$(\cos\theta)'=-\sin\theta$

$(\sin\theta)'=\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

例



$r(\theta)=a$

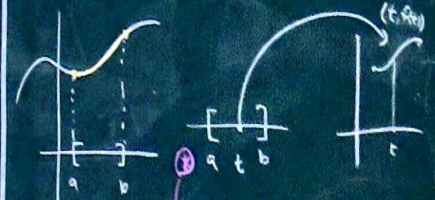
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(0)^2+a^2}\,d\theta=\Big[a\theta\Big]_0^{2\pi}=2\pi a$$

⊛ $\boxed{\ell(C)=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}$

曲線

C が ある関数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して

$\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}$ とあらわされているときに、

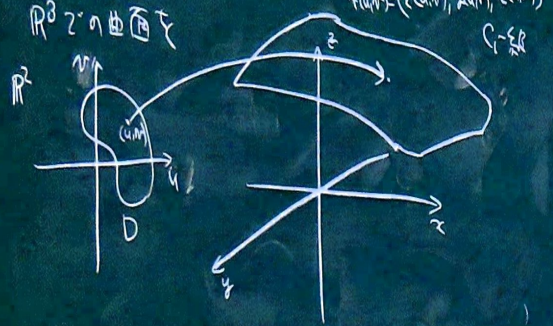


と見ると、 $\ell(C)\overset{⊛}{=}\int_a^b\sqrt{(t')^2+(f'(t))^2}\,dt$

$$=\int_a^b\sqrt{1+(f')^2}\,dt$$

曲面の面積

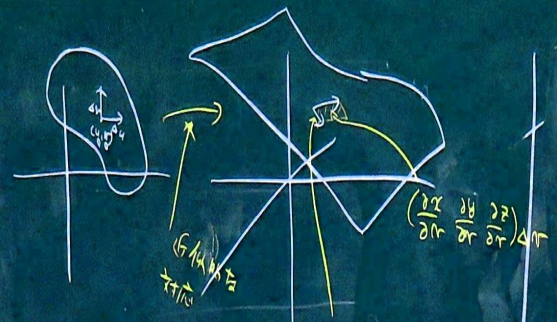
$\mathbb{R}^3$ での曲面とは



平面

$$S=\{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v)\in D\}$$

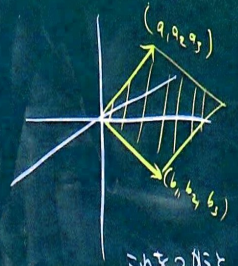
ととらえる.



ここで S が各点の近傍が"曲面"になっていることを保証するために, $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ と $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ が各点で線形独立になっていると仮定する.

(ベクトル)

3次元ベクトル (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) が張る平行四辺形の面積は



$$\sqrt{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2}$$

であらわされる.

これをつかうと,

$$\Delta S = \left\{ (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \;\middle|\; \begin{array}{l} u\in[u_0, u_0+\Delta u] \\ v\in[v_0, v_0+\Delta v] \end{array} \right\}$$

の面積は

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\,\Delta u \Delta v$$

で近似される.

このことから

S の面積は,

$$\int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\, du\, dv$$

とあらわされる.