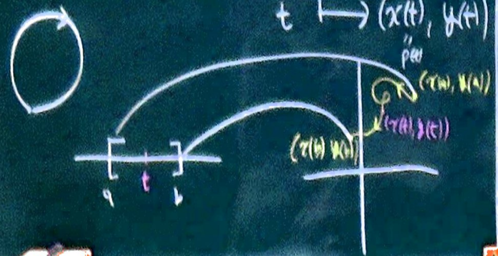
Green の定理

平面上の曲線を始点と終点を持つ点運動の軌跡として考える。

C_1-級の関数 $p:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (x(t), y(t))$



ただし、すべての $t\in[a,b]$ に対し、

$\left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) \neq (0,0)$ とする

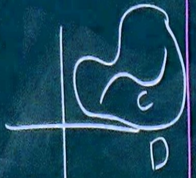
(特に運動 $t\longmapsto p(t)$ は後もどりしない) を表現する。

p は曲線

$C = \{(x(t), y(t)) \mid t\in[a,b]\}$

とその始点、終点と向きを表現する。

平面上の領域 D に対して、$f: D\to\mathbb{R}$ が与えられていて、p で与えられる曲線 C が D に属しているとき



$$\boxed{\int_C f\,dx \text{ を } \int_a^b f(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt \text{ と定義する}}$$

実際 $\int_C f\,dx$ は曲線 C (とその向き) のみに依存する。

$p^*: [a^*, b^*]\longrightarrow\mathbb{R}^2 : u\mapsto (x^*(u), y^*(u))$

をもう1つの C の同じ向きでの表現とすると、

このとき、C_1-級の真に増加する関数 $g:[a,b]\to[a^*,b^*]$

で すべての $t\in[a,b]$ に対し $(x(t), y(t)) = (x^*(g(t)), y^*(g(t)))$ となるようなものがとれる。このとき、

$$\int_{a^*}^{b^*} f(x^*(u), y^*(u))\frac{dx^*(u)}{du}\,du$$

$$= \int_{a^*}^{b^*} f(x(g^{-1}(u)), y(g^{-1}(u)))\frac{d(x(g^{-1}(u)))}{du}\,du$$

$$\frac{dg^{-1}(u)}{du}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=g^{-1}(u)}$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

$t=g^{-1}(u)$ とおく

p で表現される曲線 C に対して C を終点から始点にたどる表現で考えたとき、これを C^{-1} とあらわす。C^{-1} は

たとえば

$p_0: [a,b]\longrightarrow (x(a+b-t), y(a+b-t))$

$x(a+b-t) = x_0(t)$, $y(a+b-t) = y_0(t)$

で表現できる。このとき

(☆)

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt = -\int_a^b f(x_0(t), y_0(t))\frac{dx_0(t)}{dt}\,dt$$

$$= -\int_{C^{-1}} f\,dx \quad /\!/$$

Jordanの定理

有界な曲線

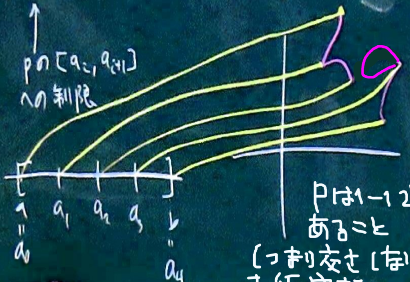
Cの表現 p が区分的に C^1 級とは、

$p:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ として 点

$a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$ がとれて 各

$p\restriction(a_i,a_{i+1})$ が C^1 級となっていること

↑ pの $[a_i,a_{i+1}]$ への制限



pは1-1であること (つまり交さしない) も仮定する。

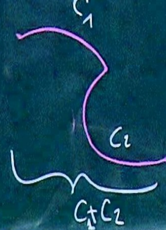
このときには

各 $p\restriction[a_i,a_{i+1}]$ の表現する曲線を C_i として

$$\int_C f\,dx=\int_{C_1} f\,dx+\int_{C_2} f\,dx+\cdots+\int_{C_k} f\,dx$$

と定義する 特に曲線 C_1 に曲線 C_2 を

つなげてできる曲線を C_1+C_2 とあらわすことにすると



$$\int_{C_1+C_2} f\,dx=\int_{C_1} f\,dx+\int_{C_2} f\,dx$$

グリーンの定理

$D\subset\mathbb{R}^2$ を閉領域とする。つまり D は

閉曲線となっているような曲線が境界になっている領域で

これらの閉曲線を含むものとする 特に閉曲線は

C^1 級の関数で表現されていて

表現関数(点の運動)は Dの内部

を左に見ながら進むものとする

このような境界線を(向きを含めて)

∂D であらわす。 $\underbrace{f:D\to\mathbb{R}}_{C^1\text{-級関数}}$

が与えられたとき、

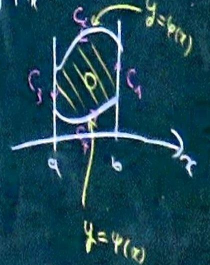
(1) $$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dxdy=-\int_{\partial D} f\,dx$$ また、

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dxdy=\int_{\partial D} f\,dy$$

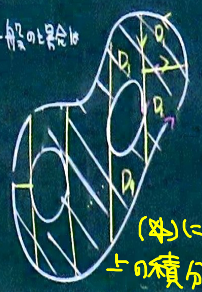
証明 (1)を示す (2)も同様にできる

一般性を失うことなく Dは

となっているとしてよい



一般の場合は



$$\int_{\partial D} f\,dx=\int_{\partial D_1} f\,dx+\cdots$$

(※)により 黄色で描いた"切断線"上の積分は打ち消されることに注意

$$\int_{\partial D} f\,dx = \int_{C_1} f\,dx + \int_{C_2} f\,dx + \int_{C_3} f\,dx + \int_{C_4} f\,dx$$

$$= \int_{\psi(b)}^{\varphi(b)} f(b,t)\underbrace{\frac{db}{dt}}_{0}\,dt$$

$$+ \int_a^b f(a+b-t,\ \varphi(a+b-t))\underbrace{\frac{d(a+b-t)}{dt}}_{-1}\,dt$$

$$+ \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} f(a,\ \varphi(a)+\psi(a)-t)\underbrace{\frac{da}{dt}}_{=0}\,dt + (\nearrow)$$

C_1 $P_1 : [\psi(b), \varphi(b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\underset{x_1(t)}{b},\ \underset{y_1(t)}{t})$$

C_2 $P_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\underset{x_2(t)}{a+b-t},\ \underset{y_2(t)}{\varphi(a+b-t)})$$

C_3 $P_3 : [\psi(a), \varphi(a)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\underset{x_3(t)}{a},\ \underset{y_3(t)}{\varphi(a)+\psi(a)-t})$$

C_4 $P_4 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\underset{x_4(t)}{t},\ \underset{y_4(t)}{\psi(t)})$$

$$(\nearrow) + \int_a^b f(t, \psi(t))\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1}\,dt$$

$$= -\int_a^b f(t, \varphi(t))\,dt + \int_a^b f(t, \psi(t))\,dt$$

$$= -\left(\int_a^b \left[f(t, y) \right]_{\psi(t)}^{\varphi(t)} dt \right)$$

$$= -\left(\int_a^b \left[f(x, y) \right]_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dy \right)$$

$$= -\left(\int_a^b \left[\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx \right] dy \right)$$

微分積分学の基本定理

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx\,dy \quad //$$