

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

定義域

$$\text{関数 } f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ として}$$

$U_\delta(a)$ をとる
たまたまは



D

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が D で連続とは

すべての $a \in D$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ となること.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \text{ に対して } \delta > 0 \text{ が存在する} \\ \text{その } \delta \text{ の } x \in U_\delta(a), \\ |f(x) - f(a)| < \epsilon \\ \text{と成り立つこと.} \end{array} \right]$$

$$U_\delta(a) = \{x \in D \mid d(x, a) < \delta\}$$

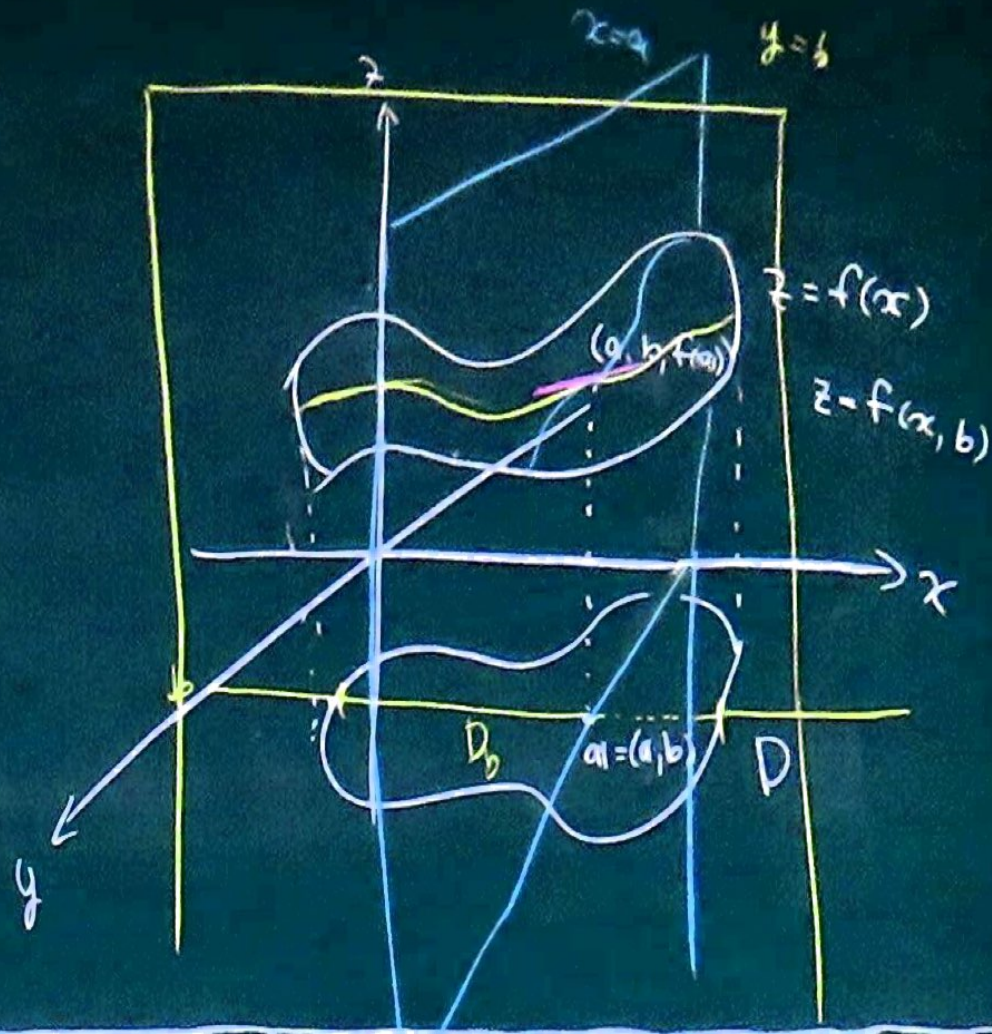
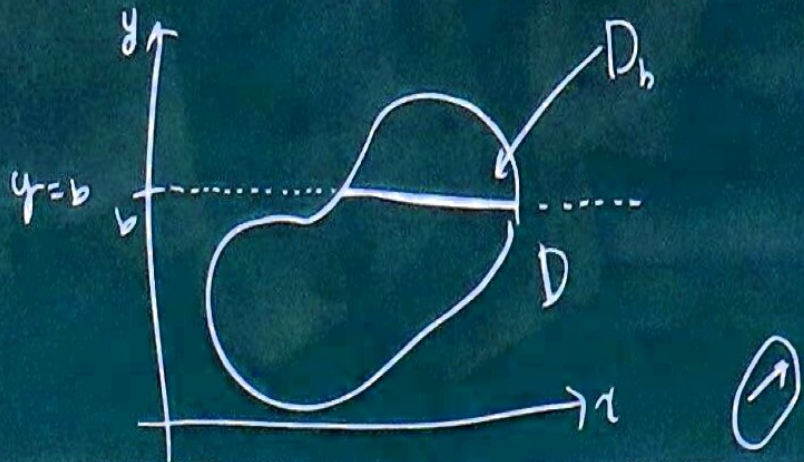
a の $U_\delta(a)$ ^{さきほう} δ -近傍

独 Umgebung
=

偏微分 (partial differentiation)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ と } (a, b) \in D$$

(= 対し, $f(x, b)$ を $D_b = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in D\}$
 上の (一変) 関数と ~~考え~~ えたとき,



この関数が (x, y) の関数として) 偏微分可能るとき、
 x の a での微分係数を f の (a, b) での
 x -偏微分係数と定義しこれを

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a, y=b}$$

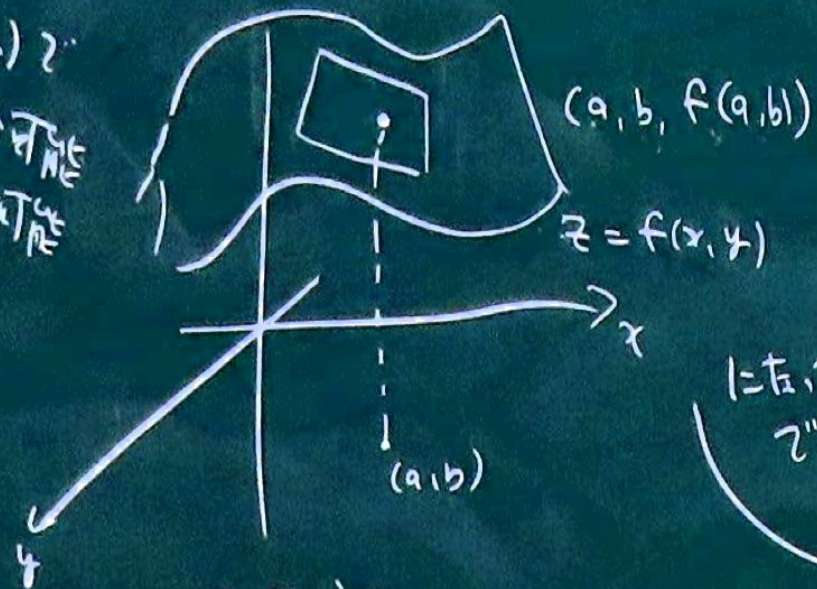
と書く。

同様に $f(a, y)$ を $D_a = \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in D\}$
 上の関数と見て y の b での微分係数が存在すると
 これを f の (a, b) での y -偏微分係数と定義し

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a, y=b}$$

と書く。

f は (a, b) での
 x -偏微分可能
 y -偏微分可能
 とする



"接平面" が存在する

f の方程式は

$$z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} y + C$$

に在っているはず
 である。

したがって平面は $(a, b, f(a, b))$ を含む。この
法則は $(a, b, f(a, b))$ の法則である。この法則は

$$z = f(a, b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=a \\ y=b}} (x-a) \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=a \\ y=b}} (y-b)$$

でなければならぬことがわかる。

f が D の点 (a, b) で x -偏微分可能とすると、関数

$$D \ni (a, b) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \in \mathbb{R}$$

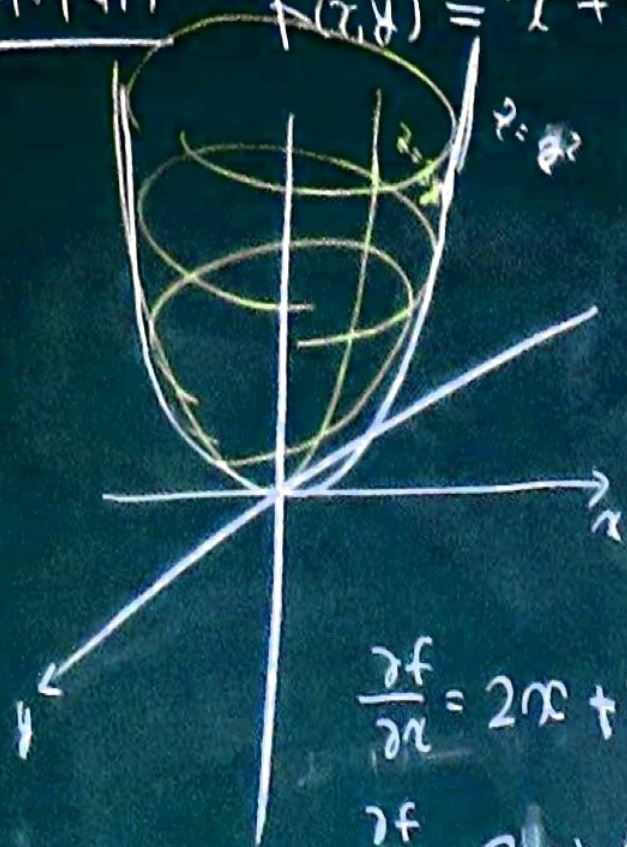
が与えられる。この関数を f の x -偏導関数
(x -partial derivative) とし $\frac{\partial f}{\partial x}$ と書く。

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と書く。また $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a, y=b}$ は $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a, b)$ と書く。

$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ についても同様。

例 4.9

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$$



$$\begin{aligned} f(1, 1) \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \\ &= 1 + 2 + 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y$$

つまり $z = f(x, y)$ の点 (1, 1) の

(1, 1) での接平面は,

$$z = f(1, 1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=1, y=1} (x-1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=1, y=1} (y-1)$$

$\Leftrightarrow$

$$z = 6 + 4(x-1) + 8(y-1)$$

$\Leftrightarrow$

$$z = 4x + 8y - 6$$

例 4.10

$$f(x, y) = x^2 e^{xy}$$

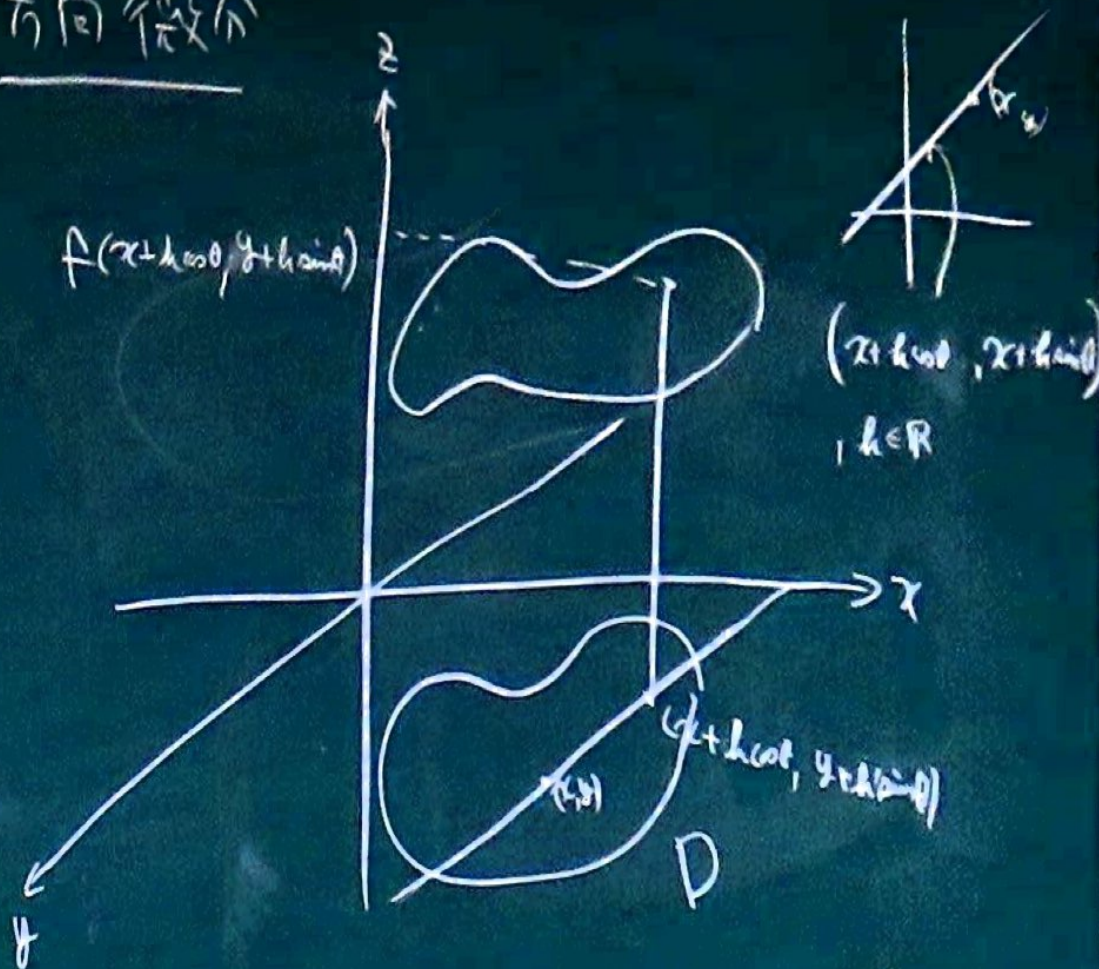
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$f_x(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$$

$$f_y(x, y) = x^2 \cdot x e^{xy}$$

$$= x^3 e^{xy}$$

方向微分



f_{xy} と f_{yx} は同じになるか?

答
"微分性" の f により f_{xy} と f_{yx} は同じになる。

定理 4.1 開領域 D 上の関数 f に

対し、 f_x f_y f_{xy} f_{yx} が存在

f_{xy} と f_{yx} がともに連続なら、 $f_{xy} = f_{yx}$ である。
(Dr)