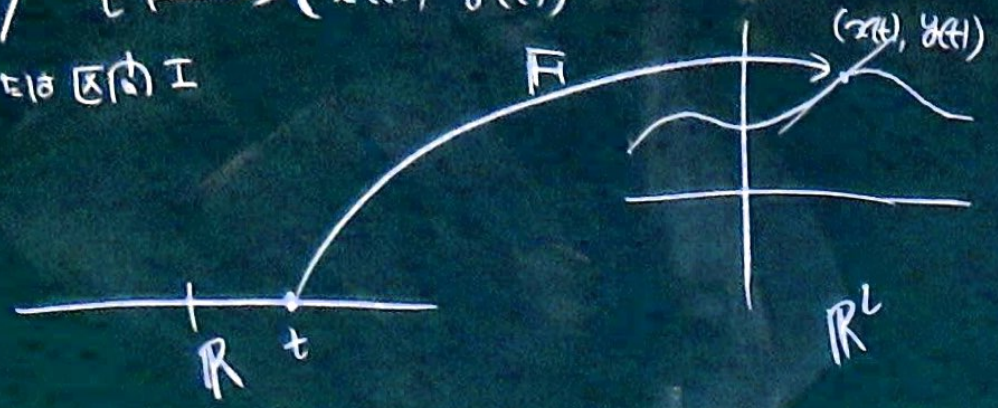
ベクトル値関数

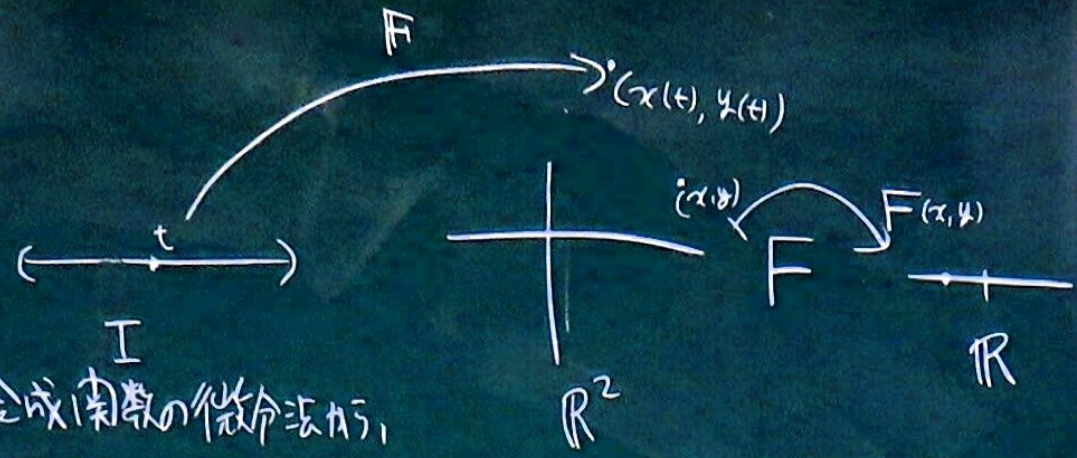
$\mathbb{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を考えることもある。

または区間 I

$$t \longmapsto (x(t),\ y(t))$$



$$\frac{df}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t),\ \frac{dy}{dt}(t)\right)$$



合成関数の微分法から、

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = \frac{dx}{dt}(t)\,F_x(x(t),y(t)) + \frac{dy}{dt}(t)\,F_y(x(t),y(t))$$

陰(黙)関数　implicit function

(中: 陰急 函数)

2変数関数 $F(x,y)$ を考える

$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ として

$D \subset \mathbb{R}^2$

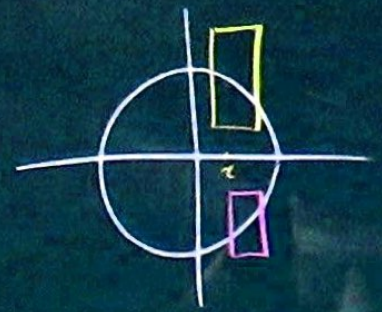
$(a,b) \in D$ で $F(a,b)=0$ とする.

$\{(x,y)\in D \mid F(x,y)=0\} \ni (a,b)$

例 $F(x,y) = x^2+y^2-1$

とすると $F(x,y)=0 \iff x^2+y^2=1$

だから $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$ は原点を中心とした半径1の円



$y=\sqrt{1-x^2}$

$y=-\sqrt{1-x^2}$

$F(x,y)=0$ for all $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

なら

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}=\mathbb{R}^2$

定理4.8 F は領域 D 上で C^1-級

(1回偏微分可能で(1回)偏微分した結果が連続関数となっている) のとき、 $(a,b)\in D$ で $F(x,y)=0$

で、 $x=a$ の (十分に小さな) 近傍 $I=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$

上の関数 φ で $\varphi(a)=b$ で

$F_y(a,b)\neq 0$ なら

$$F(x,\varphi(x))=0 \quad \text{for all } x\in I$$

となるようなものが (Iに対して) 1意に

きまる。さらにこのとき、φ は C^1-級で

$$(*)\quad \varphi'(x)=-\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} \quad \text{for all } x\in I$$

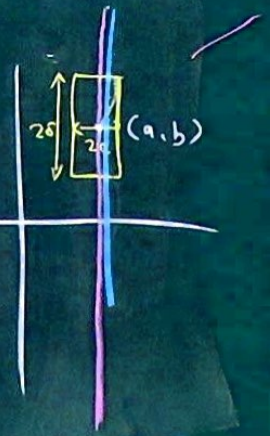
となる。

証明(説明)

$F_y(a,b)\neq 0$ なので十分に小さな ε と δ をとると、

$I_0=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ $J_0=(b-\delta,\ b+\delta)$

として



すべての $(x,y)\in I_0\times J_0$ に対して

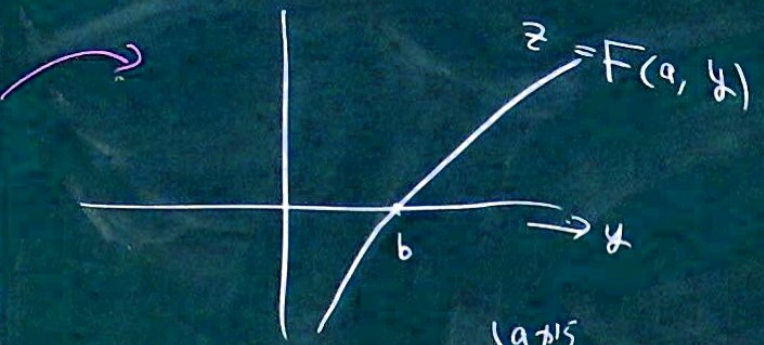
$F_y(x,y)\neq 0$ となるようなものが

とれる。$F_y(x,y)$ は $I\times J$ 上同一附号

たとえば $F_y(x,y)>0$ とすると

$x=a$ の断面で見たとき、

$F(a,y)=0$ となる y は J_0 の中では b のみである。



同様のことは x 座標を少しずらした a_0 をとったときにも言えて $F(a, y)=0$ となるような y は1意に決まる。このような値をつなげて φ を作ることができる。

(aから)

この関数が C^1-級になり (*) となることも示せる。

⋮

ただし定理でのような φ が C^1-級であることがわかれば φ が (*) を満たすことは、偏微分の連鎖律からすぐにわかる：

(**) $F(x, \varphi(x)) = 0$ がすべての $x \in I$ で成り立つ

$F_y(x, \varphi(x)) \neq 0$ で

φ が C^1-級とすると、

(**) の両辺を x で微分すると

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x))$$

$$= \underbrace{(x)'}_{=1} F_x(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \underbrace{F_y(x, \varphi(x))}_{\neq 0}$$

両辺を $F_y(x, \varphi(x))$ でわって移項すると

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

例題 4.9

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1$$

として $F(x,y)=0$ で与えられる曲線の陰関数を考える.

$$F(x,y) = (x+y)^2 + y^2 - 1$$

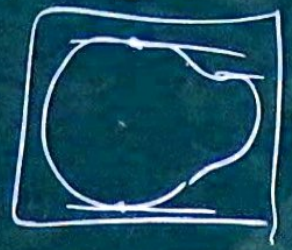
なので $F(x,y)=0$ なら $(x+y)^2 \leq 1$ $(\Leftrightarrow |x+y| \leq 1)$

かつ $|y| \leq 1$

左辺,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid F(x,y) = 0\}$$

$$C \subseteq [-1, 1] \times [-1 \times 1]$$



$$F_x(x,y) = 2x + 2y$$

$$F_y(x,y) = 2x + 4y$$

$\varphi(x)$ を $F(x,y)=0$ の陰関数とするとき,

$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 0$ となる $(x, \varphi(x))$ は

$$F(x,y) = 0, \quad F_x(x,y) = 0$$

$F_{xx} = 2$

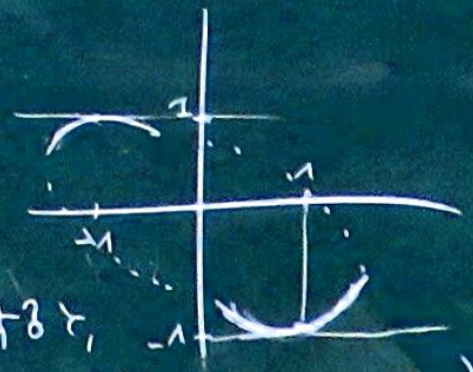
上を満たす点なので

$y = -x$ でこれを $F(x,y)=0$ に代入して

$$x^2 - 2x^2 + x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1, 1$$

$(1,-1)$ $(-1,1)$ が そのような点で

あることがわかる。



この2点での

$\dfrac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ を考える

(***)を両辺を微分すると、

$$0 = \frac{d}{dx}\left(F_x(x,\varphi(x))\right) + \frac{d}{dx}\left(\varphi'(x)\,F_y(x,\varphi(x))\right)$$

$$= F_{xx}(x,\varphi(x)) + \varphi''(x)\,F_y(x,\varphi(x))$$

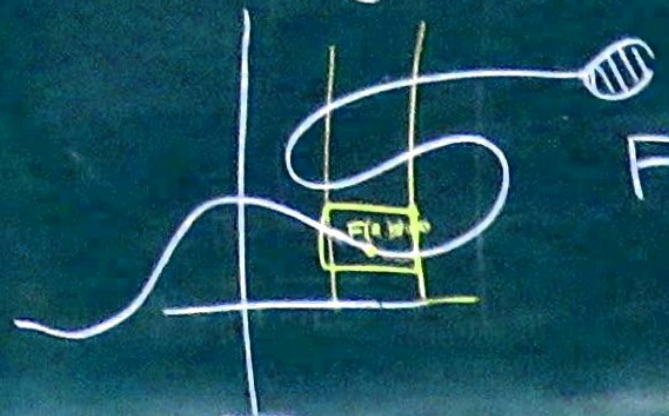
$$+ \underbrace{\varphi'(x)}_{x=1,-1\text{では}0} \frac{d}{dx} F_y(x,\varphi(x))$$

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$ だから

$x=1,-1$ で

$$\varphi''(1) = -\frac{2}{-2} = 1 > 0$$

$$\varphi''(-1) = -\frac{2}{2} = -1 < 0$$



$F(x,y)=0$