局所的に最大

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$(a, b) \in D$ に対し、f は (a, b) で

極大である $\Longleftrightarrow$ ある十分に小さな

極小

$\varepsilon > 0$ をとると すべての

$U_\varepsilon(a, b) \ni (x, y)$ $(x, y) \neq (a, b)$

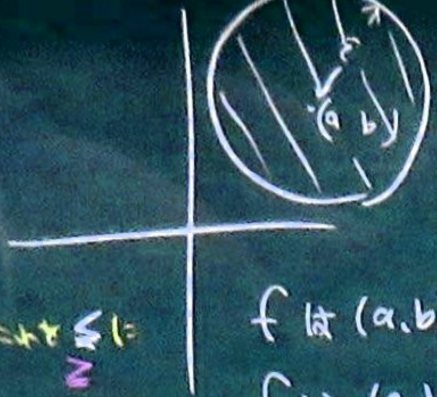
極値をとる

に対し、$f(x, y) < f(a, b)$

$>$

となること

$U_\varepsilon(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \right\}$



(a, b) の ε-近傍

(ε-neighborhood)

これを $\leqq$ に $\geqq$ 変えたとき、f は (a, b) で広義に 極大 極小 であり どう.

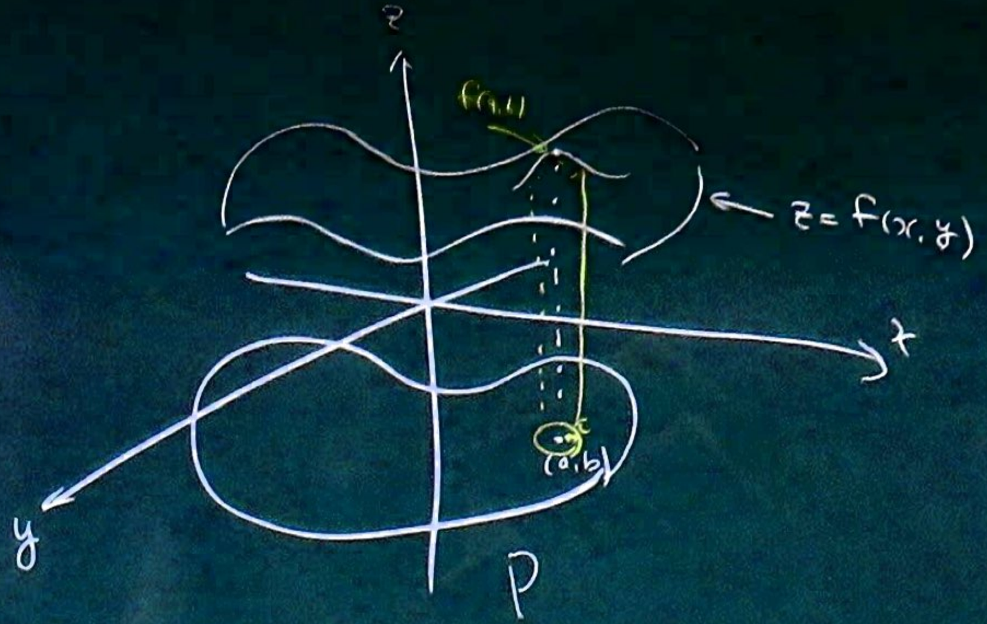
f は (a, b) で極大である

f は (a, b) で極大値をとる

(a, b) は f の極大点である.

f takes a maximal value at (a, b)

(a, b) is a maximum point of f



定理4.9 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能なとき、f が (a,b) で極値をとるなら、

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である。

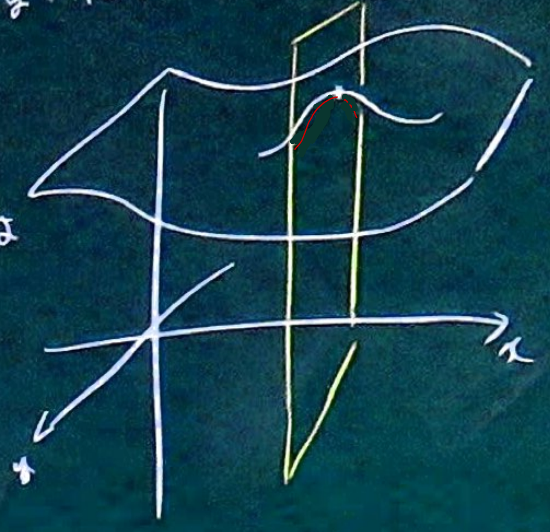
つまり もし

$f_x(a,b) \neq 0$ または

$f_y(a,b) \neq 0$ なら、

f は (a,b) では

極値をとらない。



$f(x,y) = x^2 - y^2$

逆は成り立たない

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ としても f は

(a,b) で極値をとるとは限らない.

$f(x,y)$ を C^2 級の関数とするとき,

$$\det H(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

と定義する.

教科書 定理4.10

定理10 $f : D \to \mathbb{R}$ を D で C^3 級,

とし, $(a,b) \in D$ で $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

となるとする

(1) $\det H(a,b) > 0$ のときには f は (a,b) で極値をとる.

(a) $f_{xx}(a,b) > 0$: f は (a,b) で極小

(b) $f_{xx}(a,b) < 0$: f は (a,b) で極大

(2) $\det H(a,b) < 0$ のとき, f は (a,b) で極値をとらない.

(3) $\det H(a,b) = 0$ 不定

(f が <a,b> で極値をとるかどうかは f の3次以上の偏導関数を調べてみないとわからない)

例 4.12 $f(x,y)=x^3+3x^2+3y^2-6y+1$

の極値をすべて求める.

教科書 例題 4.12

$f_x(x,y)=3x^2+6x$

$f_y(x,y)=6y-6$

$x(x+2)=0$

$x^2+2x=0$

$\Updownarrow$

だから,
$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ 6y-6=0 \end{cases}$$

$\iff x=0,\ -2,\ y=1$

だから f が極値をとる点の候補は, $(0,1)$, $(-2,1)$ の2点である(定理4.9).

$f_{xx}(x,y)=6x+6$

$f_{yy}(x,y)=6$

$f_{xy}(x,y)=0$

$\det H(x,y)=36x+36$

$\det H(0,1)=36$

$\det H(-2,1)=-72+36=-36 \Rightarrow (-2,1)$で f は極値をとらない

$f_{xx}(0,1)=6>0$ なので

f は $(0,1)$ で極小値をとる

f が極値をとる点は $<0,1>$ のみである.

定理4.10の証明(説明)

テイラーの定理を用いる。

テイラーの定理を $n=3$ に対して用いると

$$
\begin{aligned}
f(a+h,\ b+k) = f(a,b) &+ \frac{1}{1!}\left(\overbrace{f_x(a,b)}^{=0}h + \overbrace{f_y(a,b)}^{=0}k\right) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2\right) \\
&+ R
\end{aligned}
$$

と書けるが、十分に小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$\sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon$ なら、R は十分小さくなる

また仮定から、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

$$
f(a+h,\ b+k) \approx \overbrace{f(a,b)}^{\delta} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underbrace{f_{xx}(a,b)}_{\alpha}h^2 + 2\overbrace{f_{xy}(a,b)}^{\beta}hk + \underbrace{f_{yy}(a,b)}_{\gamma}k^2\right)}_{\frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2\right)}
$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2\right)}$$

$$= \alpha \frac{1}{2}\underbrace{\left(h + \frac{\beta}{\alpha}k\right)^2}_{\substack{\shortparallel \\ h^2 + \frac{2\beta}{\alpha}hk + \frac{\beta^2}{\alpha^2}k^2}} + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{2\alpha}k^2$$

$\alpha\gamma - \beta^2 = \det H(a,b)$

detH(a,b)>0 のとき

$\alpha = f_{xx}(a,b) > 0$ なら $\underline{\qquad}$ は $(h,k) \neq (0,0)$ なら常に >0

したがってこのときには f は (a,b) で $\left(U_\varepsilon(a,b)\text{で}\right)$ 極小である

同様に $\alpha = f_{xx}(a,b) < 0$ のときには f は (a,b) で $\left(U_\varepsilon(a,b)\text{で}\right)$ 極大になる。

$\det H(a,b) < 0$ のときには

$\alpha\frac{1}{2}\left(h + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ と $\frac{\alpha\gamma + \beta^2}{2\alpha}k^2$ は $+-$ 逆なので

なっているので $U_\varepsilon(a,b)$ で $\underline{\qquad}$ は $+$ の値も $-$ 値もとる。したがってこのときには f は (a,b) で極値をとらない。

$\boxtimes$

定理 4.11 (Lagrange の未定乗数法)

関数 $f: D \to \mathbb{R}$ を C^1-級として,

$\varphi: D \to \mathbb{R}$ $\varphi(x,y)=0$ を満たすすべての $(x,y)\in D$ で $\varphi_x(x,y)\neq 0$ または $\varphi_y(x,y)\neq 0$ のどちらかが成り立つものとする

このとき,

$\varphi(x,y)=0$ を満たすような $(x,y)\in D$ での $f(x,y)$ が (広義の) 極値をとる点は,

$$L = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y) \quad \lambda\in\mathbb{R} \text{ として}$$

L を 3変数の関数 $L(x,y,\lambda)$ と見たとき

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

を満たす。

(2)