訂正:

長方形の領域 $[a,b]\times[c,d]$ の分割 $P_x\times P_y=\{[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}] \mid 0\le i<m,\ 0\le j<n\}$ に対しての分割の細かさを

$$|P_x\times P_y| = \max\left\{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{j+1}-y_j)^2} \;\middle|\; 0\le i<m,\ 0\le j<n\right\}$$

と定義する.

定理7.2 D $f,g:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら,

(1) $f+g$ も Riemann 積分可能で

$$\iint_D f+g\,dxdy = \iint_D f\,dxdy + \iint_D g\,dxdy$$

(1.5) 任意の $\langle x,y\rangle\in[a,b]\times[c,d]$ に対して $f(x,y)>0$ となるとき $f^2:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R};\ \langle x,y\rangle\mapsto(f(x,y))^2$ も積分可能である.

(2) fg も Riemann 積分可能である.

(3) $c\in\mathbb{R}$ とすると cf も Riemann 積分可能で $\iint_D cf\,dxdy = c\iint_D f\,dxdy$

証明 (2) と (3) は既に見た.

(1.5): f は Riemann 積分可能なので有界である. $M\in\mathbb{R}$ を $0<M$ で すべての $\langle x,y\rangle\in[a,b]\times[c,d]$ に対して, $|f(x,y)|<M$ とする. f の Riemann 積分可能性から 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ で 任意の 分割 $P_x\times P_y$ で $|P_x\times P_y|<\delta$ なら, $\left(\overline{S}^{f}_{P_x\times P_y}-\underline{S}^{f}_{P_x\times P_y}\right)<\frac{\varepsilon}{2M}$ となるものがとれる.

$$\left(\overline{S}^{f^2}_{P_x\times P_y}-\underline{S}^{f^2}_{P_x\times P_y}\right)=\sum M_{ij}^2(\quad)(\quad)-\sum m_{ij}^2(\quad)(\quad)$$

$$=\sum(M_{ij}^2-m_{ij}^2)(\quad)(\quad)=\sum\overbrace{(M_{ij}+m_{ij})}^{\le 2M}(M_{ij}-m_{ij})(\quad)(\quad)$$

$$\le 2M\underbrace{\left(\sum(M_{ij}-m_{ij})(\quad)(\quad)\right)}_{\left|\overline{S}^{f}_{P_x\times P_y}-\underline{S}^{f}_{P_x\times P_y}\right|<\frac{\varepsilon}{2M}}$$

$$<\varepsilon$$

ε は任意だったのでこのことから, f^2 は Riemann 積分可能であることがわかった.

(2): $fg=\frac{1}{2}\left((f+g)^2-f^2-g^2\right)$ $f,g>0$ のときは

$(f+g)^2=f^2+2fg+g^2$ なので (1), (1.5), (3) により, fg は積分可能であることがわかる. 一般には:

f と g は有界なので十分に大きな $L>0$ を

とると、$f^* = f+L$　$g^* = g+L$

(つまり、$f^*: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R};\ \langle x,y\rangle \mapsto f(x,y)+L$

$g^*: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R};\ \langle x,y\rangle \mapsto f(x,y)+L$)

とは、$f^*>0$, $g^*>0$ とできる

したがって f^*g^* は積分可能だが　f^*, g^* が可積分であるから

$$fg = (f^*-L)(g^*-L) = f^*g^* - Lf^* - Lg^* + L^2$$

となるので fg も積分可能であることがわかる。

$\boxtimes$

$D \subseteq [a,b]\times[c,d]$ とするとき、D の特性関数

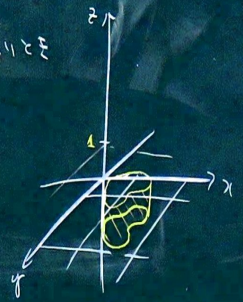
(characteristic function) $\chi_D : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$

ギリシャ文字 chi の小文字 (c にそれぞれ対応する)

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \langle x,y\rangle \in D \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

と定義する。

χ_D が Riemann 積分可能なとき、D は Riemann 可測であり D の面積を



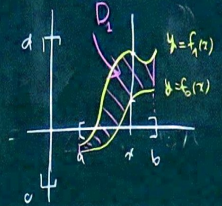
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \chi_D \, dx\,dy$$ と定義する。

補題 3.1　(1) $f_0, f_1 : [a,b] \to [c,d]$ が連続で

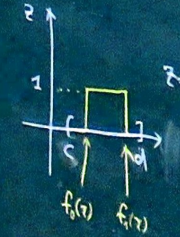
すべての $x \in [a,b]$ に対し、$f_0(x) < f_1(x)$ となっているときには、

$$D_1 = \{\langle x,y\rangle \in [a,b]\times[c,d] \mid a \le x \le b,\ f_0(x) \le y \le f_1(x)\}$$

は Riemann 可測で



$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \chi_{D_1}\, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \chi_{D_1}\, dy \right) dx = (*)$$



$$(*) = \int_a^b \left(f_1(x) - f_0(x) \right) dx$$

である

(2) (1) で x と y の役割を入れかえたもの

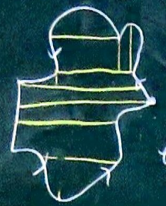
証明のキーワード：閉区間上での連続関数は一様連続になる

補題 3.2

D を区分的に C_1-級で連続な閉曲線で囲まれた領域とすると、D は有限個の補題 3.1 での $D_1, \dots, D_k$ の区間に分割できる。特に D は Riemann 可積分で、

$$\iint \chi_D \, dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint \chi_{D_i} \, dxdy$$

である。



区分的に C_1-級で連続

$c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 ; t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$

$c_0(0) = c_0(1)$, $c_1(0) = c_1(1)$

D を $\mathbb{R}^2$ での有界な領域とする。

(つまり ある $a<b$, $c<d$ で $D \subseteq [a,b] \times [c,d]$ となるものがとれる。

D が Riemann 可積分のとき、定理 2.2, (2) により、

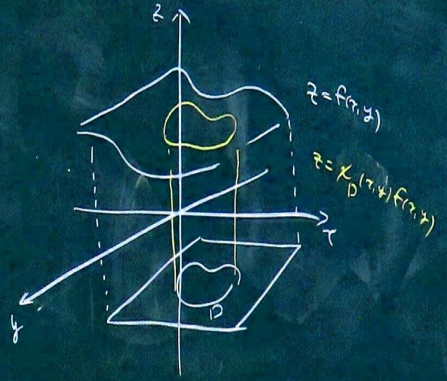
⇒ χ_D が積分可能

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ が $[a,b] \times [c,d]$ で Riemann 積分可能なら、

$\chi_D f$ も $[a,b] \times [c,d]$ で Riemann 積分可能である。

$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \chi_D f \, dxdy$ のことを f の D 上での積分といい

$\iint_D f \, dxdy$ と書く。

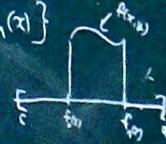


補題 3.3

$f_0, f_1 : [a,b] \to [c,d]$ を連続として

$D = \{ (x,y) \mid a \le x \le b,\ f_0(x) \le y \le f_1(x) \}$

のとき



$$\iint_D f(x,y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_0(x)}^{f_1(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

である。x と y の役割を入れかえたものも成り立つ。

証明 $\iint_D f(x,y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \chi_D(x,y) f(x,y) \, dy \right) dx$

$= \int_a^b \left(\int_{f_0(x)}^{f_1(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$ ∎