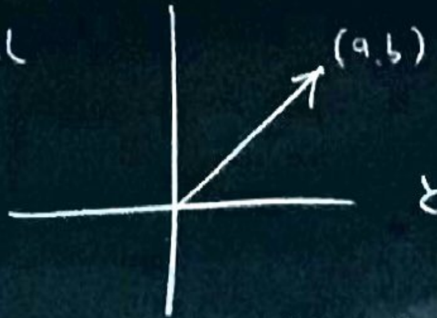
平面ベクトル

復習



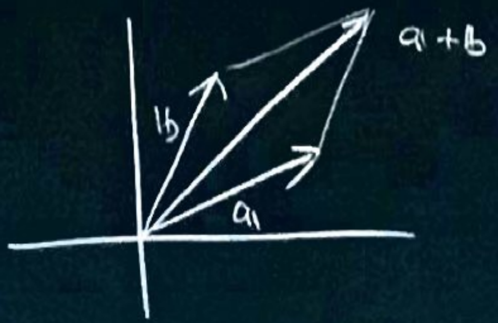
と

列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を同一視する

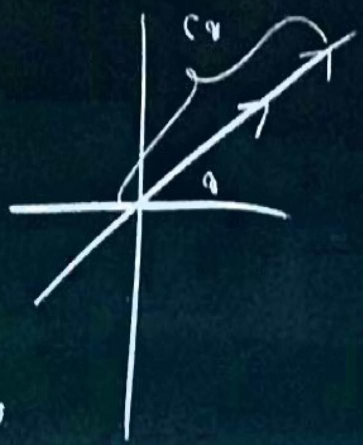
特に, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して

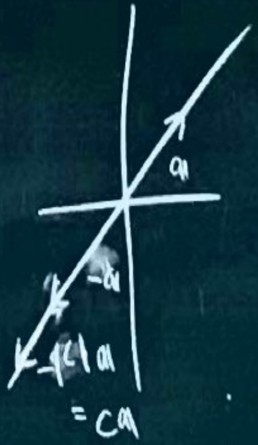
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$c\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \end{bmatrix}$$ は



$c > 0$ のとき





$c < 0$ のとき

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

平面ベクトルの全体

$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が線形変換とは、

変換
写像
(関数)

(1) すべての $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(2) すべての $a \in \mathbb{R}^2$ $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(ca) = c\varphi(a)$$

が成り立つこと。

補題 4.1 Aを2×2行列とするとき、

$$\varphi_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad a \mapsto Aa$$

は線形変換である。

証明: (1): $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_A(a+b) &= A(a+b)\\ &= Aa + Ab\\ &= \varphi_A(a) + \varphi_A(b)\end{aligned}$$

行列のかけ算 分配則

(2): $a \in \mathbb{R}^2$ $c \in \mathbb{R}$ のとき

$$\varphi_A(ca) = A(ca) = c(Aa) = c\varphi_A(a).$$ ☒

定理 4.2 すべての線形変換 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し

$$\underbrace{\varphi(a) = \varphi_A(a)}_{\text{がすべての } a\in\mathbb{R}^2 \text{ に対し成り立つ}}$$

ような行列 A がただ1つ求まる。

つまり $\varphi = \varphi_A$

証明 φ を線形変換とすると、$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ なので

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \varphi\left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \overset{(2)}{=} \underline{a\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

となる. $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とする.

このとき $$\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} a_{11}a + a_{12}b \\ a_{21}a + a_{22}b \end{bmatrix}$$

したがって $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると, $\varphi = \varphi_A$

このような A はただ1つにきまる;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$ として $A \neq A'$

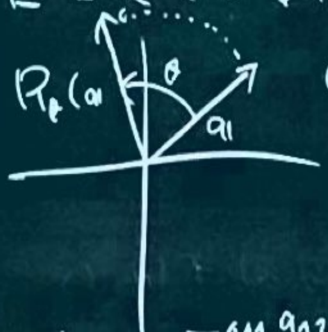
なら, たとえば $a_{11} \neq a'_{11}$ として

$$\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \varphi_{A'}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \end{bmatrix}$$ だが $\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \varphi_{A'}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⊠

原点のまわりの半時計まわり(左回り)角度θだけ回転させる変換 R_θ は線形変換写像なので



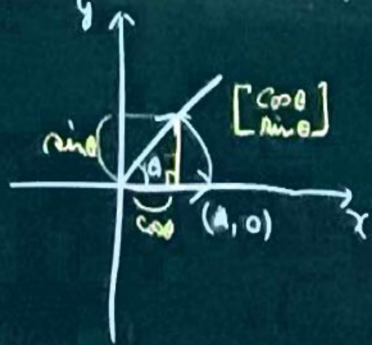
したがって定理4.2から,

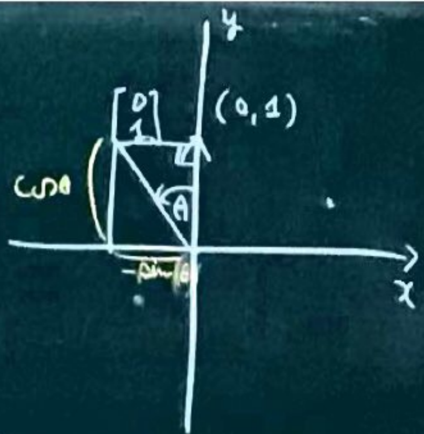
$$R_\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$ となる

行列 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ がとれる 証明から

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = R_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = R_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$ となるしたがって





<u>定理 4.3</u> 回転 R_θ は行列

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ を左からかける演算と等しい

↑

この行列のことも R_θ とあらわす.

ベクトルを原点の回りに左回り角度 α だけ回転させ
さらにそれを角度 β 回転させることを考える
これは角度 $\alpha+\beta$ 回転させることと同じ

$a \in \mathbb{R}^2$ を $a = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とし

$$R_\beta\left(R_\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$R_{\alpha+\beta}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\|$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & \cdots \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & \cdots \end{bmatrix}$$

したがって

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

である。

行列 A のたてとよこを入れかえて得られる行列を ^tA と書く

A の転置

transpose of A

ベクトルの内積

ベクトルの長さ（大きさ）は $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2+b^2}$ であらわされるの

（$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ だった。）

$$^t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [a, b] \qquad ^t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a, b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [ac+bd]$$

これを $ac+bd$ と同一視する

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{^t\mathbf{a}\,\mathbf{a}}$$

$$[a, b]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 + b^2$$

ベクトル $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ に対し $^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = [a_x\ a_y]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = a_xb_x + a_yb_y$

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積とよび $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ であらわす。

inner product

定理 4.4 A, B を $m\times n$, $n\times p$ 行列 とするとき ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ である

${}^tA = [a^t_{ji}]$ （a_{ij}）　${}^tB = [b^t_{kj}]$ （b_{jk}）

証明 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$ として,

${}^t(AB)$ の (k, i)-成分 $=$ AB の (i, k)-成分

$$= \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j a^t_{ji} b^t_{kj}$$

$$= \sum_j b^t_{kj} a^t_{ji}$$

$=$ ${}^tB\,{}^tA$ の (k, i) 成分

したがって ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ である。

定理 4.5 内積は回転に関して不変である

つまり 任意の θ に対して, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (R_\theta(\mathbf{a}))\cdot(R_\theta(\mathbf{b}))$ が成り立つ.

証明 $(R_\theta(\mathbf{a}))\cdot(R_\theta(\mathbf{b}))$

$$= {}^t(R_\theta(\mathbf{a}))\,(R_\theta(\mathbf{b}))$$

$$= {}^t(R_\theta \mathbf{a})(R_\theta \mathbf{b})$$

$$= ({}^t\mathbf{a}\,{}^tR_\theta)(R_\theta \mathbf{b})$$

定理4.4

$$= {}^t\mathbf{a}\,(\underbrace{{}^tR_\theta R_\theta}_{=E})\,\mathbf{b}$$

$$= {}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^tR_\theta &= {}^t\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= R_{-\theta} \end{aligned}}$$

補題4.6 $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ のとき $\alpha > 0$ なら

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, $\alpha<0$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

である

$|\alpha||\mathbf{b}| = |\alpha\mathbf{b}|$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ として

証明 $\alpha>0$ $\alpha<0$ のとき

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$
$$= \alpha|\mathbf{b}|^2$$
$$= \alpha|\mathbf{b}||\mathbf{b}|$$
$$= -|\alpha\mathbf{b}||\mathbf{b}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = {}^t\mathbf{b}\,\mathbf{b} = a^2+b^2 = |\mathbf{b}|^2$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [1,0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1\times0+0\times1 = 0$$

∎

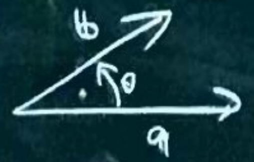
補題4.7（演習：ヒント 定理4.5を用いる）

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するとき、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

定理4.8 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とするとき

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$$

である。

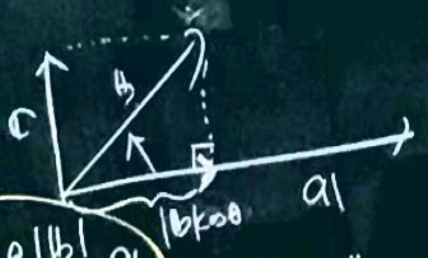


証明

a 直交

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + \frac{\cos\theta|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

となるが



$\frac{\cos\theta|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{c}+\frac{\cos\theta|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right)$$

$$= \underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}_{0} + \frac{\cos\theta|\mathbf{b}|}{\cancel{|\mathbf{a}|}}\underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}_{|\mathbf{a}|^{\cancel{2}}} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

∵補題4.7

∎