復習 ベクトル空間 V の要素 $u_1, \dots, u_n$
Vector

が一次独立 とは 任意の $u_1, \dots, u_n$ の一次結合
(線形独立)
linearly independent

これを $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ と書く

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \qquad c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$$

が V のゼロベクトル $\mathbb{0}$ と等しいなら、

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

となること。

補題 $u_1, \dots, u_n$ が一次独立で

$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix}$ なら、

$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \neq c_1' u_2 + \cdots + c_n' u_n$ である。

証明 もし $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = c_1' u_2 + \cdots + c_n' u_n$ だったとすると、

両辺から $c_1' u_2 + \cdots + c_n' u_n$ をひいて

$$(c_1 - c_1') u_1 + \cdots + (c_n - c_n') u_n = \mathbb{0}$$

が得られるが、仮定から

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_1' \\ \vdots \\ c_n - c_n' \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$$

である。これは $u_1, \dots, u_n$ が一次独立であることに矛盾である。 ☒

定理 4.2.1　$u_1, \cdots, u_n \in V$ として、

$u_1, \cdots, u_m$ は 1次独立でない
1次従属 (linearly dependent)

$\Longleftrightarrow$

$u_1 \cdots u_m$ の中のどれかが他のものの
1次結合で書ける。

証明 $\Rightarrow$: $u_1 \cdots u_n$ が 1次独立でないとすると

$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \neq 0$ で $\overset{(*)}{c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0}$

となるものがある。$c_1 \cdots c_n$ の(少くとも)どれか1つは0でないので それを たとえば
c_1 とおくと、(*)の両辺を $\frac{1}{c_1}$ 倍すると

$$左辺 = \frac{1}{c_1}(c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) = \cancel{\frac{c_1}{c_1}} u_1 + \frac{c_2}{c_1} u_2 + \cdots + \frac{c_m}{c_1} u_m$$

$$左辺 = 右辺 = \frac{1}{c_1} 0 = 0$$

移項して

$$u_1 = -\frac{c_2}{c_1} u_2 + \cdots + -\frac{c_n}{c_1} u_n$$

となり u_1 は $u_2 \cdots u_n$ の
一次結合として書けることがわかる。

$\Leftarrow$ たとえば $u_1 = c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ と表されたとすると
移項して

$$u_1 + (-c_2) u_2 + \cdots + (-c_n) u_n = 0$$

となるから $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は一次独立ではない。 ∎

定理4.2.2 $u_1,\dots,u_m,\ u \in V$ として

$u_1 \cdots u_m$ が一次独立で $u_1,\dots,u_m,u$ は一次独立でないときには u は $u_1,\dots,u_m$ の一次結合として表わされる。

証明 $u_1 \cdots u_m, u$ は一次独立でないので

$$0 \neq \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ で } c_1u_1+\cdots+c_mu_m+cu = 0$$

となるものが存在する。このとき $c \neq 0$ である。

もし $c=0$ とすると

$$0 \neq \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ で}$$

$c_1u_1+\cdots+c_mu_m=0$ となり、$u_1,\dots,u_m$ が一次独立でア

ア あることと矛盾。したがって前と同じように

$$u = \left(-\frac{c_1}{c}\right)u_1 + \cdots + \left(-\frac{c_m}{c}\right)u_m$$ と書ける。 $\boxtimes$

定理4.2.3 $u_1,\dots,u_m,\ v_1,\dots,v_n \in V$

として

(1) $v_1 \cdots v_n$ はそれぞれ $u_1,\dots,u_m$ の一次結合として書ける

(2) $n > m$

なら、$v_1 \cdots v_n$ は一次独立でない。

前回やった記法!

$$(u_1,\dots,u_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \overbrace{\left(\sum_{i=1}^m a_{i1}u_i,\ \sum_{i=1}^m a_{i2}u_i\ \cdots,\ \sum_{i=1}^m a_{in}u_i\right)}^{n\text{コ}}$$

$((u_1 \cdots u_m) \underset{m\times n\ \text{行列}}{A}) \underset{n\times \ell\ \text{行列}}{B} = (u_1, \cdots, u_m) AB$

が成り立つ!

定理 4.2.4 $u_1 \cdots u_m$ が1次独立で

$(u_1, \cdots, u_m) A = (0, \cdots 0)$ なら

$A = O$ である.

証明 記法の定義から明らか. □

定理 4.2.5 $u_1 \cdots u_m$ が1次独立とし, A B を $m\times n$ 行列とする

(*) $(u_1, \cdots, u_m) A = (u_1, \cdots, u_m) B$ なら $A = B$ である

証明 (*) なら, $(u_1, \cdots, u_m)(A-B) = O$ となるので

定理 4.2.4 から, $A - B = O$ となり $A = B$. □

次は前回にも見た: $u_1, \cdots, u_m \in V$

$V = [[\{u_1, \cdots, u_m\}]]_V = \{\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \mid c_i \in \mathbb{R}\}$ のとき,

$\{v_1 \cdots v_k\} \subseteq \{u_1, \cdots, u_m\}$ で一次独立で一次独立なものの中で $\subseteq$ に関して

極大なものがとれるが このとき 定理 4.2.1 により $u_1 \cdots u_m \in [[\{v_1, \cdots, v_k\}]]_V$

となるから $V = [[\{v_1, \cdots, v_k\}]]_V$ となる. $\{v'_1 \cdots v'_\ell\}$ を一次独立で

しかも $V = [[\{v'_1, \cdots, v'_\ell\}]]$ なら, 定理 4.2.2 $k \le \ell$ $\ell \le k$ なので $k = \ell$

となることがわかる.

ベクトル空間 V の有限個の要素 $u_1, \dots, u_m$ で

$V = [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ となるものがあるとき,

V の一次独立な要素 $v_1, \dots, v_k$ で

$V = [\{v_1, \dots, v_k\}]_V$ となるものが存在

このとき k は一意に決まる.
(V に対して)

$\{v_1, \dots, v_k\}$ を V の基底 (basis) とよぶ

k を V の次元 (dimension) とよび $\dim(V)$ で表わす.

結論　有限な基底を持つベクトル空間を有限次元ベクトル空間とよぶ

例　$\mathbb{R}^n$ の次元は n である

証明

$$e_i = \begin{array}{r} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n$$

とすると,

$\{e_1, \dots, e_n\}$ は一次独立でかつ $\mathbb{R}^n$ を

はるから, $\mathbb{R}^n$ の基底である. したがって $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ である.

定理 V を有限次元ベクトル空間として，

$u_1 \cdots u_m$ を V の一次独立なベクトルとするとき

$\{u_1 \ldots u_m\}$ を拡張して V の基底にすることができる

特に $m \le \dim(V)$

証明 V の基底 $\{w_1 \cdots w_k\}$ がとれる

このとき $\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_\ell}\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_k\}$ で

$\{u_1 \cdots u_m\} \cup \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_\ell}\}$ が V で一次独立で

そのようなもののうちで $\subseteq$ に関して極大なものとすると，

定理4.2.2から，$w_1 \cdots w_k \in [\{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_\ell}\}]_V$ ∴

したがって $V = [\{\quad\} \cup \{\quad\}]_V$ となり，

$\{u_1 \cdots u_m, w_{i_1}, \ldots, w_{i_\ell}\}$ は V の基底であることがわかる.

系 任意の有限次元ベクトル空間 V の部分空間 W は

有限次元ベクトル空間で

$$\dim(W) \le \dim(V)$$

となる W が V の真の部分空間なら $\dim(W) < \dim(V)$

である.

例 $\mathbb{R}^3$ の部分空間は $\mathbb{R}^3$ 自身か 0 or 1 or 2 次元

である.

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ は W を張る.
n_0 を $w_k \ne 0$ となる最大の k とすると
$\dim(W) = n_0$ である.

補足：有限次元空間の部分空間は有限次元空間である

[V を n 次元空間として $W \subseteq V$ を V の部分空間とする。

$W \ne \{0\}$ としてよい.

W の要素 w_k $k \le n$ を，(1) $w_1 \ne 0$ は任意にとる

$w_1 \cdots w_{k-1}$ がとられたとき，w_k は，$w \in W$ で，

$w_1, \ldots, w_{k-1}, w$ が独立 となるものがあれば w_k はそのようなものの1つ

そうでなければ $w_k = 0$．このとき定理4.2.3により