Timeline： 6月8日 定期試験
（持ち込み可） 90分

- 5月19日から 5月25日の間に レポートの課題を 講義の web page に 掲示
- 6月1日に レポートの提出
- 5月25 - 6月1日までの間に 定期試験の予想問題集を 講義の web page に upload.

この両方の課題が定期試験の問題のほとんど全部.

定理

(1) U と V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として $\dim(U) = \dim(V)$ で $\{u_1, \dots, u_n\}$ と $\{v_1, \dots, v_n\}$ をそれぞれの基底とする。このとき U の任意の要素 u は

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

と一意にあらわされる。このとき、

特に $\varphi(u_i) = \varphi(0u_1 + \cdots + 1 \cdot u_i + \cdots) = v_i$

$$\varphi : U \to V ; \ a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \mapsto a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

とすると、φ は ① 線形写像になる、② φ は1対1写像で ③ φ は V の上への写像である。

(2) 逆に ベクトル空間 U, V に対して、$\varphi : U \to V$ 線形写像で 1対1で V の上への写像のとき、$u_1, \dots, u_n$ を U の基底とすると $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ は V の基底である。

1対1で上への線形写像 $\varphi: U \to V$ を
UからVへの同形写像であるという
特に定理から、$\dim(U) = n$ のときには
U から $\mathbb{R}^n$ への同形写像が存在する

定理の証明 (1)：φを(1)でのように定義する.

$x_1, x_2 \in U$ で

$x_1 = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$
$x_2 = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$ とおくと

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi((a_1+b_1)u_1 + \cdots + (a_n+b_n)u_n)$$

φの定義による
$$= (a_1+b_1)v_1 + \cdots + (a_n+b_n)v_n$$
$$= (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n)$$
$$= \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$ となる.

$c \in \mathbb{R}$ のとき

$$\varphi(c x_1) = \varphi(c(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n))$$
$$= \varphi(c a_1 u_1 + \cdots + c a_n u_n)$$

φの定義による
$$= c \cdot a_1 v_1 + \cdots + c a_n v_n$$
$$= c(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)$$
$$= c\varphi(x_1)$$

よって φは線形写像である.

ふたたび $x_1, x_2 \in U$ で
$x_1 = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$
$x_2 = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$ とおく

$x_1 \neq x_2$ とおくと $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n)$ である. このとき, φの定義から,

$\varphi(x_1) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$
$\varphi(x_2) = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ である $v_1 \ldots v_n$ は1次独立なので $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

よって φは1対1である

$v \in V$ とすると，$c_1 \cdots c_m \in \mathbb{R}$ をえらんで
$v = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m$ とあらわされる.
このとき，$u = c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m$ とすると φ の定義から
$\varphi(u) = v$ である. よって φ は V の上への写像になっている.

(2) $\varphi : U \to V$ への線形写像で1対1で V の上への写像となっているものとする.
$u_1 \cdots u_m$ を U の基底とするとき，

(a) $\{\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m)\}$ は一次独立である：$a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ で
(*) $a_1\varphi(u_1) + \cdots + a_m\varphi(u_m) = 0$ とおいて，$a_1 = \cdots = a_m = 0$
となることが言えればよい. (*)と φ の線形性から，

$$
\begin{aligned}
0 = a_1\varphi(u_1) + \cdots + a_m(u_m) &= \varphi(a_1u_1) + \cdots + \varphi(a_m u_m) \\
&= \varphi(a_1u_1 + \cdots + a_m u_m)
\end{aligned}
$$

ここで $\varphi(0)=0$ で φ は1対1だったので
$a_1u_1 + \cdots + a_m u_m = 0$ である. $u_1 \cdots u_m$ は一次独立なので，$a_1 = \cdots = a_m = 0$ である. よって示したいことが示せた.

(b) $\{\varphi(u_1) \cdots \varphi(u_m)\}$ は V を張る. (つまりすべての $v \in V$ は $\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m)$ の一次結合としてあらわせる)：φ は V の上への写像だったので $\varphi(u) = v$ となる $u \in U$ が存在する.
$u = b_1u_1 + \cdots + b_m u_m$　$b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$ とあらわされるが

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi(b_1u_1+\cdots+b_m u_m) = b_1\varphi(u_1)+\cdots+b_m\varphi(u_m) \\
&= v
\end{aligned}
$$

となり，v は $\varphi(u_1)\cdots\varphi(u_m)$ の一次結合としてあらわされている.

以上で $\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m)$ は V の基底であることが示せた. ⊠

前回: $T: U \to V$ を線形写像として,

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\} \quad (T\text{の像 Image})$$

は V の部分空間で

$$\mathrm{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$$ は U の部分空間となる. U が有限次元のときには

$\mathrm{Im}(T)$ も $\mathrm{Ker}(T)$ も有限次元になる

↖ U の部分空間だからよい

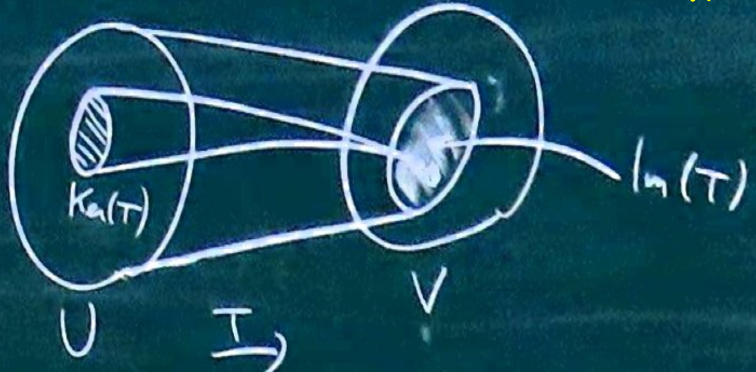
$u_1, \dots, u_n$ を U の基底とするとき,

$T(u_1), \dots, T(u_n)$ は (前の定理の(b)の証明の後半と同様にして) $\mathrm{Im}(T)$ を張ることが示せる. したがって $\mathrm{Im}(T)$ も有限次元

定理 (三宅 定理5.1.2) Dimension Theorem (次元定理)

$T: U \to V$ の線形写像として, U が有限次元のとき

$$\dim(U) = \underset{= m}{\dim(\mathrm{Im}(T))} + \underset{= n}{\dim(\mathrm{Ker}(T))}$$



証明

⊗ $\{u_1, \cdots, u_m\}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の基底とする $\subset U$

$\{v_1 \cdots v_m\}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする $\subset V$

$v_i \in \mathrm{Im}(T)$ なので ある $w_i \in U$ によって

$T(w_i) = v_i$ となるようにできる.

$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_m$ はたがいに異る.

主張 $\{u_1 \cdots u_m, w_1, \cdots w_m\}$ は U の基底である.

$m+m$ コの要素を持つから この主張により証明が完了する.

主張の証明

1次独立性: $c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_m \in \mathbb{R}$

(*) $c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m + d_1 w_1 + \cdots + d_m w_m = 0$ のとき

(**) $c_1 = \cdots = c_m = d_1 = \cdots = d_m = 0$ を言えばよい. T は線形写像だから,

$$T(c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m + d_1 w_1 + \cdots + d_m w_m) = 0$$

$$\begin{aligned} &= c_1 \underset{\substack{\| \\ 0}}{T(u_1)} + \cdots + c_m \underset{\substack{\| \\ 0}}{T(u_m)} + d_1 \underset{\substack{\| \\ v_1}}{T(w_1)} + \cdots + d_m \underset{\substack{\| \\ v_m}}{T(w_m)} \end{aligned}$$

したがって $d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m = 0$ だが $\{v_1 \cdots v_m\}$ は一次独立だから, $d_1 = \cdots = d_m = 0$

したがって (*) が

$c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = 0$ だが $\{u_1 \cdots u_m\}$ は

1次独立だから, $c_1 = \cdots = c_m = 0$

となり (**) が示せた

$u_1 \cdots u_m\ w_1 \cdots w_n$ は U を張る:

$u \in U$ とおくとき, $T(u) \in \mathrm{Im}(T)$ なので

$d_1 \cdots d_n \in \mathbb{R}$ で $T(u) = d_1 w_1 + \cdots + d_n w_n$ と

なるようなものがとれる ☆ $u^* = u - (d_1 w_1 + \cdots + d_n w_n)$

とおくと, $T(u^*) = T(u) - (\underbrace{d_1 T(w_1) + \cdots + d_n T(w_n)}_{T(u)})$

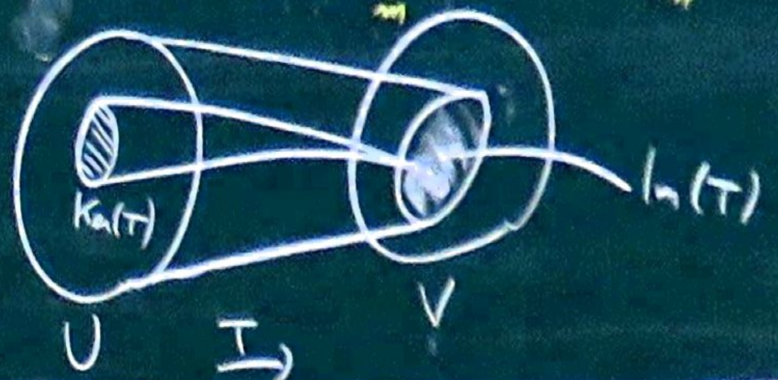
$= 0$

つまり u^* は $\mathrm{Ker}(T)$ の要素である. $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は $\mathrm{Ker}(T)$ の基底

定理 (次元定理 5.1.2) Dimension Theorem (次元定理)

$T: U \to V$ の線形写像として, U が有限次元のとき

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T))$$



だから $c_1 \cdots c_m \in \mathbb{R}$ で † $c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = u^*$ となるものがとれる.

このとき ☆ と † から $u = c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m + d_1 w_1 + \cdots + d_n w_n$

である.