

定理 1 U, V をベクトル空間とし
 $\varphi: U \rightarrow V$ が線形写像である

(1) φ は V 上の写像である

$$\Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) = V$$

(2) φ は 1 対 1 の写像である

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$$

(3) φ は U と V の同形写像

$$\Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) = V \text{ かつ } \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$$

(4) U と V を有限次元とし, $\dim(U) = \dim(V)$

のとき

次の同値性が成立する.

φ は同形写像である $\Leftrightarrow \varphi$ は 1 対 1 で满たす

$\Leftrightarrow \varphi$ は V 上の射影写像である.

証明 (1) は明らか.

(2): $a \in U$ に対し $\varphi(a) = 0$ となるのは
 $\exists a' \in U$ 使得する. ここで $\varphi(a') = 0$ となるのは
 $a = a'$ である. つまり $a = a'$ であることは、つまり

$\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ である. 逆に $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ とすると,

$a, a' \in U$ で $a \neq a'$ とすると, $a - a' \neq 0$ である (なぜか?)

$\varphi(a - a') \neq 0$ となるが, $\varphi(a) \neq \varphi(a')$ である.

$$\varphi(a) = \varphi(a')$$

(なぜか?) φ は 1 対 1 である.

(3) 線形写像は射影、直積への因像で
射影の逆像、すなはち、(1)と(2) がよい。

(4) 次元定理によると $\dim(V) = \dim(W) = m$ とき
(Peano's Theorem)

φ は線形写像 $\Rightarrow \varphi$ は 1 対 1 の因像

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 0$$

(2)

$$\Rightarrow \text{次元定理より } \dim(\text{Im}(\varphi)) = m$$

$$\Rightarrow \dim(V) = m \text{ とき } \text{Im}(\varphi) = V \text{ となる}$$

φ は V 上への写像である

$\Rightarrow \varphi$ は V 上への写像 $\Leftrightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) = m$

$$\Rightarrow \text{次元定理より } \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\} (\exists i=1, 2)$$

$$(2) \text{ は } \varphi \text{ は } 1 \text{ 対 } 1 \text{ の因像}$$

$\Rightarrow \varphi$ は V 上への線形写像

定理 2 R^n から R^m への線形写像 φ に対して
 $m \times n$ -行列 A_φ 1 対 1 定まる $\varphi = \varphi_{A_\varphi}$ となる

$$T \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \varphi_{A_\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto A_\varphi x$$

証明 $m \times n$ -行列 A に対して、 φ_A が線形写像 φ であることを見てみた。

$1 \leq i \leq m$ に対して \mathbb{R}^n の基本ベクトル

$$e_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Y-axis} \quad R^i \text{ は } e_1^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底ベクトル全体は \mathbb{R}^n の基底である。

$$\psi(\mathbf{p}_i^n) = q_i \text{ とおく. } \therefore A_p = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

とすると $\mathbf{p}^n = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_n q_n$ となる.

このとき $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\psi(x) = A_p x$

となることを示せばよい

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ とすると}$$

$$\psi(x) = \psi(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n)$$

$$= c_1 \psi(e_1) + \dots + c_n \psi(e_n)$$

$$= c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = A_p x$$

$$\underbrace{[a_1 \ \dots \ a_n]}_{A_p} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n \quad \boxed{\boxed{[c_1 \ \dots \ c_n]}}$$

このとき $A_p + B$ は \mathbb{R}^n に属するので $B + A_p$ である.

ある $B = [b_{ij}]$ $A_p = [a_{ij}]$ とする ただし $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$

$$(= i+j, \ b_{i+j} \neq a_{i+j}) \text{ のとき}$$

$$B e_i^n = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{im} \end{bmatrix} \leftarrow i \quad A e_i^n = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix} \leftarrow i \text{ つまり } B e_i^n \neq A e_i^n$$

$\therefore B \neq A_p$

左端が $\varphi = \varphi_A$ となる T_0 行列 A は A_X の φ ?

ある。 □

ベクトル空間 U, V の基底を定めたときの U が

V への線形写像の行列による表現

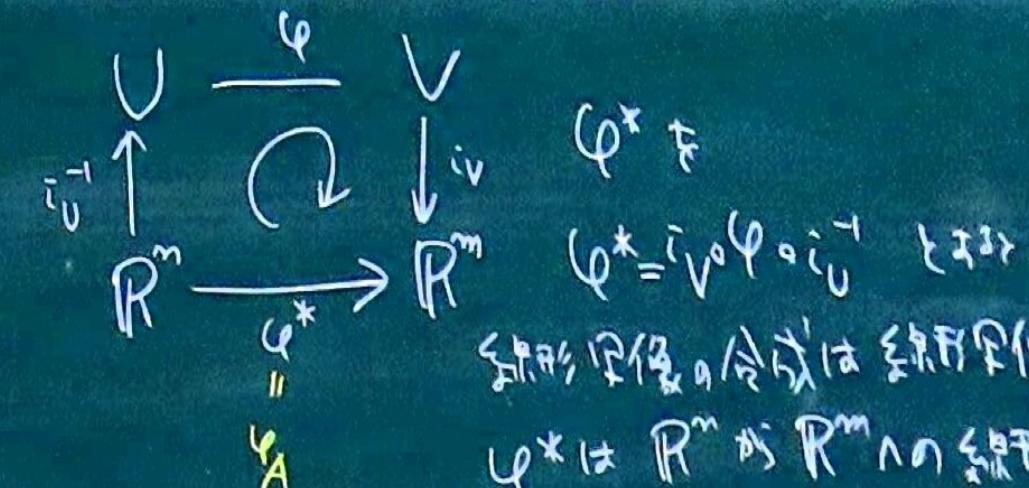
$\{u_1, \dots, u_m\}$ を U の基底とす

$\{v_1, \dots, v_n\}$ を V の基底とする。このとき、

線形写像 $i_U : U \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\sum_{i=1}^m c_i u_i \mapsto \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

$i_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\sum_{j=1}^n d_j v_j \mapsto \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ となる

φ が U が V への線形写像となる



$$\varphi^* = i_V \circ \varphi \circ i_U^{-1} \text{ となる}$$

線形写像の合成は線形写像なる

φ^* は \mathbb{R}^m が \mathbb{R}^m への線形写像である。定理 2 に従う。

$A \circ \varphi_A = \varphi^*$ となるものが $|A|$ に

存在する $\Leftrightarrow A$ が φ の基底

$\{u_1, \dots, u_m\}$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ に関する φ の表現行列となる。

定理3 U, V, W は線形空間とする

(1) $\varphi: U \rightarrow V, \psi: V \rightarrow W$ は線形写像

とき、合成写像 $\psi \circ \varphi$

$(\psi \circ \varphi: U \rightarrow W; x \mapsto \psi(\varphi(x)))$

も線形写像である

(2) $\varphi: U \rightarrow V$ が同形写像なら、

$\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ も同形写像である。

証明 (1) $u_1, u_2 \in U$ とす

φ 線形

$$(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) \stackrel{\varphi \text{ 線形}}{=} \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$$

$$\stackrel{\psi \text{ 線形}}{=} \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2))$$

$$= (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$$

$c \in \mathbb{R}$ とす

φ が線形

$$(\psi \circ \varphi)(cu_1) = \psi(\varphi(cu_1)) \stackrel{\psi \text{ 線形}}{=} \psi(c\varphi(u_1))$$

$$\stackrel{\varphi \text{ 線形}}{=} c\psi(\varphi(u_1)) = c(\psi \circ \varphi)(u_1)$$

ψ が線形

(2): φ が同形写像なら、 φ は 1 並 1 でへの写像かの?

逆写像 φ^{-1} は 1 並 1 上への写像か?

$$\varphi^{-1}: V \rightarrow U$$

$$v_1, v_2 \in V, \text{ とし } u_1 = \varphi^{-1}(v_1), u_2 = \varphi^{-1}(v_2)$$

$$\text{とすると } \varphi(u_1) = v_1, \varphi(u_2) = v_2 \text{ となる。}$$

$$\varphi \text{ は線形写像なので } \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

v_1 v_2

である。 \square

$$\underline{\varphi^{-1}(v_1 + v_2)} = u_1 + u_2 = \underline{\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)}$$

$c \in \mathbb{R}$ とし、 φ は線形写像か。

$$\varphi(cu_1) = c\varphi(u_1) = cv_1 \text{ である。} \quad \square$$

$$\underline{\varphi^{-1}(cv_1)} = cu_1 = \underline{c\varphi^{-1}(v_1)} \text{ である。}$$

したがって φ^{-1} は線形写像だから、同形写像である。 \square

(3): ²⁷⁹ 279の1対1写像の合成は上の写像か?

279の1対1写像の合成は常に写像か?

279が線形か 1対1写像か?

4. φ が 1対1写像か?

φ と φ が線形か 線形写像か? 4. φ が線形写像か?

である = のとき、同形写像の合成は同形写像

である。 \square