V をベクトル空間とするとき

($\mathbb{R}$上の) $u, v \in V$ に対して $(u, v) \in \mathbb{R}$

を対応させる関数 $(\cdot, \cdot)$ が V の内積で

あるとは すべての $u, u', v, v' \in V$, $c, c' \in \mathbb{R}$

に対し 次が成り立つこと

inner product

(1) $(u + u', v) = (u, v) + (u', v)$

Vでの和　$\mathbb{R}$での和

(2) $(cu, v) = c(u, v)$

(3) $(v, u) = (u, v)$

(4) $u \neq 0$ なら $(u, u) > 0$

補題 $(\cdot,\cdot)$ が Vでの内積なら

(5) $(u, v+v') = (u, v) + (u, v')$

(6) $(u, cv) = c(u, v)$

が成り立つ.

証明 (5): $(u, v+v') \underset{(3)}{=} (v+v', u) \underset{(1)}{=} (v, u) + (v', u) \underset{(3)}{=} (u, v) + (u, v')$

(6): $(u, cv) \underset{(3)}{=} (cv, u) \underset{(2)}{=} c(v, u) \underset{(3)}{=} c(u, v)$ ▫

内積 $(\cdot, \cdot)$ を持つベクトル空間 V を

内積空間とよぶ

inner product space

(standard) inner product

例 $\mathbb{R}^n$ での標準内積 (a, b) を

$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$　$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ として

$$(a, b) = a^t b = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$(= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$

とすると これは, 内積の公理 (1)〜(4) を満たす

補題 1

内積空間では, すべての $u \in V$ に対し $(u, 0) = 0$ が成り立つ

(V)

証明

$$(u, 0) = (u, 00) \overset{(3)}{=} (00, u) \overset{(2)}{=} 0(0, u) = 0 \quad \boxtimes$$

(4) により $u \neq 0$ なら $(u, u) > 0$ となるので $(0, 0) = 0$

$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ と定義する.

u のノルム

norm (大きさ?)

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ では 標準内積に関して $\|u\|$ は ベクトル u の "長さ" になる.

たとえば, $\mathbb{R}^2$ で $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ とすると,

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

補題 2 $(V, (\cdot, \cdot))$ を内積空間とし $u, v \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とするとき,

(0) $\|u\| \geq 0$ で $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(1) $\|cu\| = |c|\|u\|$

(2) $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Schwarz の不等式)　Cauchy-Schwarz の不等式

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

証明

(1): $\|cu\| \overset{定義}{=} \sqrt{(cu,\ cu)}$

$\underset{(2)\,(3)}{=} \sqrt{c^2(u,\ u)} = \sqrt{c^2}\sqrt{(u,\ u)}$

$= |c|\ \|u\|$

(0): $\|u\| = \sqrt{(u, u)} \geqq 0$ は明か

$u \neq 0$ なら (4) から $(u, u) > 0$

なので $\|u\| = \sqrt{(u, u)} > 0$

$u = 0$ なら 補題1から $\|u\| = \sqrt{(u, u)} = 0$

(2): $u = 0$ なら $(u, v) = 0$, $\|u\| = 0$ なので
不等式が成り立つ

$u \neq 0$ とする。$t \in \mathbb{R}$ として $\|ut + v\|^2$ を考える。

$0 \leqq \|ut + v\|^2 = (ut+v,\ ut+v)$

$\underset{(1),(2)\,(3)}{=} t^2\underbrace{(u,\ u)}_{=\|u\|^2} + 2t(u, v) + \underbrace{(v,\ v)}_{=\|v\|^2}$

この式を t に関する2次式と見ると、不等式が成り立つためには、判別式がゼロかマイナスでなければならない

($at^2 + bt + c$ の判別式は $b^2 - 4ac$)

判別式は $(2(u, v))^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$ だから

$(u, v)^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leqq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(u, v)^2}_{=|(u,v)|^2} \leqq \|u\|^2\|v\|^2$

両辺のルートをとって $|(u, v)| \leqq \|u\| \cdot \|v\|$

(3):

$$\|u+v\|^2 \overset{\text{ノルムの定義}}{=} (u+v,\ u+v)$$

$$\overset{(1),(2),(3)}{=} \underbrace{(u,u)}_{=\|u\|^2} + 2(u,v) + \underbrace{(v,v)}_{=\|v\|^2}$$

$$\le \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2$$

Schwarzの不等式

$$\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\|+\|v\|)^2$$

両辺のルートをとって

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \qquad \square$$

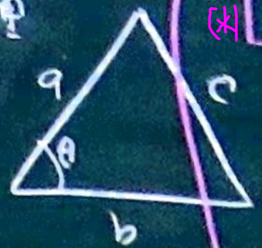
(*) $\theta = \frac{\pi}{2}$ なら $\cos\theta = 0$ だから $(a, b) = 0$ となる.

内積空間のベクトル a, b が直交するとは、

$(a, b) = 0$ となることと定義する.

$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ での標準内積に関するこの意味の直交性は幾何学的な意味での直交性と一致する.

[余弦定理



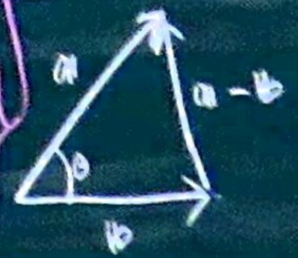
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

$\mathbb{R}^n$ の標準内積に関するノルムがベクトルの長さになることから を使うと

$$\underbrace{\|a-b\|^2}_{=(a-b,\ a-b)} = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

$$(a-b,\ a-b) \overset{(1),(2),(3)}{=} \|a\|^2 - 2(a,b) + \|b\|^2$$

(*) $\boxed{\|a\|\|b\|\cos\theta = (a,b)}$ となるし



]

定理3 $(V,(\cdot,\cdot))$ を内積空間とすると、

$u_1,\dots,u_m \in V$ が $(\cdot,\cdot)$ に関して互いに直交するなら

$u_1\neq 0 \cdots u_m\neq 0$ (i.e. $(u_i,u_j)=0$ $(i\neq j)$)

$\{u_1 \cdots u_m\}$ は線形独立である

証明 $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{R}$ として

$c_1u_1+\dots+c_mu_m=0$ なら $c_1=c_2=\dots=c_m=0$

となることを示せばよい。

$c_1u_1+\dots+c_mu_m=0$ として $1\le i\le m$ に対し

$$0 \overset{\text{補題}}{=} (u_i, c_1u_1+\dots+c_mu_m) =$$

$$\overset{(1),(2),(0)}{=} c_1\underbrace{(u_i,u_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(u_i,u_2)}_{=0}+\dots+c_i\underbrace{(u_i,u_i)}_{\neq 0\ \text{補題3(0)}}+\dots+c_m\underbrace{(u_i,u_m)}_{=0}$$

$$= c_i(u_i,u_i)$$

$\Rightarrow c_i=0$ したがって $c_1=c_2=\dots=c_m=0$.

よって $\{u_1,\dots,u_m\}$ は線形独立である。

内積空間 V のベクトル $u_1\cdots u_m$ が互いに直交しているとき $\{u_1,\dots,u_m\}$ を直交系 (orthogonal system) とよぶ。定理3により直交系は線形独立だが、これがさらに V の基底となっているとき、$\{u_1\cdots u_m\}$ を(Vの)直交基底とよぶ。

(orthogonal basis)

さらに $\underset{(Vの)}{}$直交基底 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が

$\|u_i\| = 1 \quad (1 \leq i \leq m)$ のとき

$\{u_1, \cdots, u_m\}$ を正規直交基底であるという

(orthonormal basis)

補題4 (1) u, v が直交するなら任意の $c, d \in \mathbb{R}$ に対し ($c, d \neq 0$)

cu と dv も直交する

(2) $\overset{B}{\{u_1, \cdots, u_m\}}$ が V の直交基底なら,

$B' = \left\{ \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \cdots, \frac{1}{\|u_m\|} u_m \right\}$ は正規直交基底である

証明 (1): u, v が直交する(つまり $(u, v) = 0$)

として, $(cu, dv) \overset{(2)内}{=} cd\underbrace{(u, v)}_{0} = 0$

(2): B' は B と同じ V の部分空間を生成するので

特に B が基底であることから B' は V 自身を生成する

(1) により B' の要素はたがいに直交する.

$$\left\| \frac{1}{\|u_i\|} u_i \right\| \underset{(2)}{=} \frac{1}{\|u_i\|} \|u_i\| = 1$$

だから B' は正規直交基底となっていることがわかる.