復習 V を内積空間（内積 $(\cdot,\cdot)$）とするとき V の要素の組 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ が直交基底であるとは，$\{v_1, \ldots, v_m\}$ が V の基底で

$\underbrace{(v_i, v_j) = 0}_{v_i \text{ と } v_j \text{ は直交する}}$ $1 \le i, j \le m$ $i \ne j$ となっていること

互いに直交すれば線形独立なので $\{v_1, \ldots, v_m\}$ が V の直交基底であるためには，$v_1 \ldots v_m$ が互いに直交して，$m = \dim(V)$ ならよい

直交基底 $\{v_1 \ldots v_m\}$ が $\|v_i\| = 1$ $1 \le i \le m$ のとき，$\{v_1, \ldots, v_m\}$ を正規直交基底であという。

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{(v, v)}}$$

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ が V の直交基底なら，

$$\left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \ldots, \frac{1}{\|v_m\|} v_m \right\}$$ は正規直交基底になる

Gram-Schmidt process

定理 1（グラム・シュミットの直交化法）

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ を内積空間 V の基底とするとき，V の $\underbrace{\text{直交基底}}_{\text{正規}}$ $\{u_1, \ldots, u_m\}$ で次を満たすものが存在する；

すべての $1 \le i \le m$ に対し，

$$[\{v_1 \ldots v_i\}]_V = [\{u_1, \ldots, u_i\}]_V$$ が成立つ。

例 $\mathbb{R}^n$ を標準内積での内積空間と捉えるとき，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 e_i^n，$i = 1, \ldots, m$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。

記号

Vをベクトル空間とするとき

$a_1, \dots, a_k \in V$ に対し

$$[\{a_1, \dots, a_k\}]_V = \{c_1a_1 + \dots + c_ka_k \mid c_1 \dots c_k \in \mathbb{R}\}$$

↑

(張る)

$a_1 \dots a_k$ の生成する Vの部分空間

[redacted]

$[\{a_1, \dots, a_m\}]_V$ は $a_1 \dots a_m$ を要素として含むような Vの部分空間のうち (⊆に関して) 最小のものになる。

(定理1の証明)

$\|u_1\| = \sqrt{(u_1, u_1)} = 1$

$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$ とする 明らかに $[\{u_1\}]_V = [\{v_1\}]_V$ である。

$u_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1$ とする

このとき、$(u_2', u_1) = (v_2 - (v_2, u_1)u_1, u_1)$

$$= (v_2, u_1) - (v_2, u_1)\underbrace{(u_1, u_1)}_{1}$$

$$= 0$$

だから、$u_2 = \frac{1}{\|u_2'\|}u_2'$ とおけば

$\|u_2'\| \neq 0$

$u_2' \neq 0$ である：もし $u_2' = 0$ とすると

$v_2 - (v_2, u_1)u_1 = 0$

$v_2 - (v_2, u_1)\frac{1}{\|v_1\|}v_1 = 0$ となるが

これは v_1 と v_2 が線形独立であることに矛盾する

$\|u_2\| = 1$ で $[\{u_1, u_2\}]_V = [\{u_1, u_2'\}]_V$

$= \cdots = [\{v_1, v_2\}]_V$

一般には, $u_1 \ \cdots \ u_{i-1}$ が構成できたとき,

$[\{u_1, \cdots, u_{i-1}\}]_V = [\{v_1, \cdots, v_{i-1}\}]_V$ で

(1) $\|u_k\| = 1 \quad 1 \le k \le i-1$

(2) $(u_k, u_l) = 0 \quad 1 \le k, l \le i-1 \quad k \ne l$

となるように

$$u_i' = v_i - \left(\sum_{k=1}^{i-1} (v_i, u_k) u_k\right)$$ とする.

このとき, $1 \le l \le i-1$ に対して,

$(u_i', u_l) = 0$ である:

$$\left(v_i - \left(\sum_{k=1}^{i-1} (v_i, u_k) u_k\right), u_l\right)$$

$$= (v_i, u_l) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} (v_i, u_k) u_k, u_l\right)$$

$$= (v_i, u_l) - \sum_{k=1}^{i-1} (v_i, u_k) \underbrace{(u_k, u_l)}_{=\delta_{kl}} \longleftarrow (1), (2)$$

$$= (v_i, u_l) - (v_i, u_l) \underbrace{(u_l, u_l)}_{=1} \nwarrow (1)$$

$$= 0$$

ここで, 前同様に $u_i' \ne 0$ となることがわかるので $u_i = \dfrac{1}{\|u_i'\|} u_i'$

とすればよい!

例1 標準内積に関して $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\left\{ \underset{\overset{\shortparallel}{v_1}}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{\overset{\shortparallel}{v_2}}{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}}, \underset{\overset{\shortparallel}{v_3}}{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}} \right\}$$ の正規直交化を求める：

Gram-Schmidt process による

$$u_1 = \frac{1}{\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\|}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{2}$$

$$u_2' = v_2 - (v_2, u_1)\,u_1$$

$$= \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}4} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{\left\|\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\|}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$u_3' = v_3 - \sum_{k=1}^{2} (v_3, u_k)\, u_k \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \left(\underbrace{\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{\frac{1}{\sqrt2}} \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)}_{-\frac{1}{\sqrt3}2} \frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \right)$$

$$-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{6}{6}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{4}{6}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5\\-5\\10\end{bmatrix} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\|u_3'\| = \sqrt{\frac{5^2}{6^2}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{\frac{5^2}{6^{2}}\cancel{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{5}{\sqrt6}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|u_3'\|}u_3' = \frac{\cancel{\sqrt6}}{\cancel{5}}\,\frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \right\}$$

定理2 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の正規直交基底とすると、$a = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ $b = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$ として

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

となる。

証明

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{k=1}^{n} b_k u_k \right)$$

$$= \sum_{i,k} a_i b_k \underset{\delta_{ik}}{(u_i, u_k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \overbrace{(u_i, u_i)}^{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad //$$

系3 V を (n次元の) 内積空間とする。

このとき定理1から V の正規直交基底 $\{u_1 \cdots u_n\}$ がとれるが $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V ; \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ とすると、φ は $\mathbb{R}^n$ から V へのベクトル空間の同形写像で、内積を保存する。つまり、$a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (\varphi(a), \varphi(b))$ $a = [a_i]$ $b = [b_i]$ が成り立つ。つまり $\mathbb{R}^n$ と V は内積空間としても同型である。 ∎