(型) 線形代数1
(Linear Algebra)

$n := r$

渕野昌 (Sakaé Fuchino)

Webpage:
http://fuchino.ddo.jp/kobe/

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

学習支援室

行列と数ベクトル

m と n を $1, 2, 3, \cdots$ のどれかとするとき

$m \times n$ 行列 ((m,n)-行列) matrix

とは $\underbrace{\text{数}}_{mn\text{個の}}$ を $m \times n$ の長(正)方形に並べた物のこと

(見やすいように ( ) または [ ] でかこむ)

例

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & x \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 9 \\ 100 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3行, 4列

は 3×4-行列 (($3,4$)-行列)

行列の一般形は2重添字で

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$$

a_{23} は A の 2行3列成分

行列は大文字アルファベットであらわすことが多い

$A = [a_{ij}]$, $[a_{ij}]_{m \times n}$

$[a_{ij}]_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$

などと書く。

ゼロ行列: 成分がすべて0となっている行列

$O = O_{m,n}$ とあらわす。 zero matrix

正方行列 $m = n$ となっている行列

$n \times n$-行列 square matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

は 4×4 正方行列

対角行列 diagonal matrix 正方行列

対角線上の成分以外の成分がすべて0であるような行列

対角成分 a_{ii} の形の成分

例 ゼロ行列は対角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}$$

単位行列 identity matrix, unit matrix:

対角行列で対角成分がすべて1であるような行列 E_n (I_n)

Einheitsmatrix (独)

例

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 a がある n に対して
$1 \times n$ − 行列 となっているとき a を
行ベクトル という

例 $a = [\overbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}^{5}]$ は
行ベクトル

5次元
5次 } 行ベクトル

(row vector)

行列 a が ある n に対して $n \times 1$ − 行列となっているとき
a を列ベクトル という

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 5 \end{bmatrix}$$ は 5次(元) の 列ベクトル
(column vector)

クロネッカーのデルタ Kronecker's delta

$i, j = 1, 2, 3, \cdots$ (これを $i, j \in \mathbb{N}$ と書く)
↑正の自然数の全体

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$ と定義する.

$E_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ と書ける

行列の和と差 2つの $n \times m$ 行列

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ に対し

$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$ とする

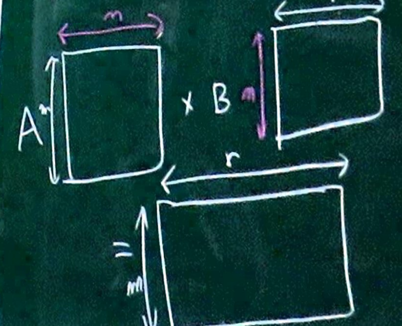
例
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \overset{2+3}{5} & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$A + O = A \quad O + A = A$

…

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \underset{7-8}{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

A と B を それぞれ $m \times n$, $n \times r$ 行列とするとき



$A=[a_{ij}]_{m\times m}$ $B=[b_{jk}]_{m\times r}$

とするとき $A\times B$ を次のような

$C=[c_{ik}]_{m\times r}$ として定義する

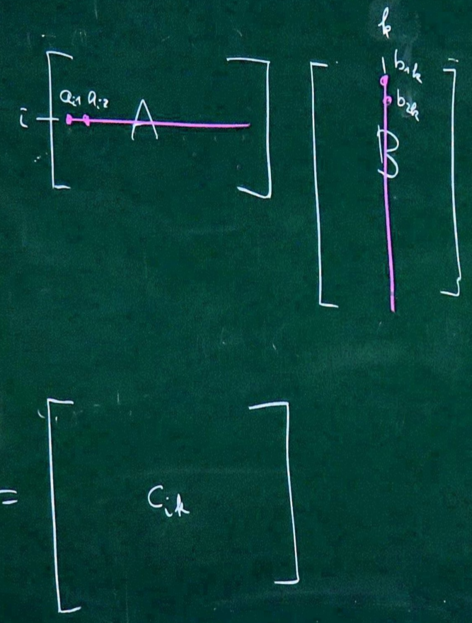
$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

Sに対応する文字

シグマ記号

ラテン語 summa 和 = sum (英)



例

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}}\underset{2\times 4}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}}$$

2×2 成分

$$= \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix}1\times1+2\times2 & 1\times2+2\times3 & 1\times3+2\times4 & 1\times4+2\times5\\ 3\times1+4\times2 & 3\times2+4\times3 & 3\times3+4\times4 & 3\times4+2\times5\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

7−8

A と B をそれぞれ

$m\times m$, $m\times r$ 行列とするとき