授業の残りの部分の Overview

- ベクトルと線形変換
  （線形写像
  線形関数）
  （4章 5章の一部）
- 連立方程式の（ガウスの）解法
  （2章）

n次元 たてベクトルとは n×1-行列のこと

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

↑ 実数の全体

n次元 よこベクトルとは 1×n-行列のこと

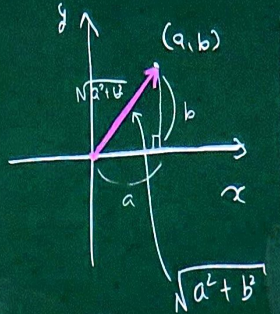
$$[a_1, \dots a_n] \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

n次元-たてベクトル の全体を $\mathbb{R}^n$ とあらわす

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ は（物理的な）n次元空間と対応がつく

たとえば $\mathbb{R}^2$ の要素 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は平面に座標を入れたときの点 (a, b) に対応づけられる



ベクトルは太文字
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$
などであらわす

今後 主にたてベクトルを考え
これらを単にベクトルと言う

$m \times n \quad n \times 1$

m×n 行列 A を n次元ベクトル $\mathbf{a}$ に左から かけると $A\mathbf{a}$ は m次元ベクトルになる ので

m×n-行列 A に対し

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

という写像（関数）を考える。

$$i \begin{bmatrix} \\ \text{—} \; a_{ij} \; \text{—} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \alpha \\ \\ \end{bmatrix}$$

$\sum_j a_{ij} x_j$

注意：教科書では、ここでの φ_A を T_A という記号であらわしている。

φ_A の形の写像は次の性質を持つ：

任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、$\varphi_A(ax+by) = a\varphi_A(x) + b\varphi_A(y)$ が成り立つ。

証明 $\varphi_A(ax+by)$

$= A(ax+by)$

$= A(ax) + A(by)$

$= aAx + bAy$

$= a\varphi_A(x) + b\varphi_A(y)$ ☒

n次元たてベクトルとは n×1-行列のこと

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

↑ 実数の全体

n次元よこベクトルとは 1×n-行列のこと

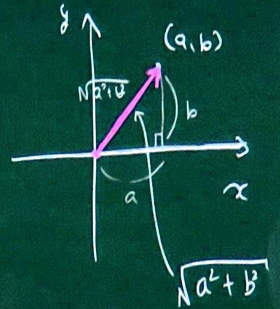
$[a_1, \dots a_n]$ $\quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

n次元たてベクトルの全体を $\mathbb{R}^n$ とあらわす

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ は（物理的な）n次元空間と対応がつく

たとえば $\mathbb{R}^2$ の要素 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は平面に座標を入れたときの点 (a, b) に対応づけられる



ベクトルは太文字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, などであらわす

今後主にたてベクトルを考え これらを単にベクトルと言

$m \times n \quad n \times 1$

$m \times n$ 行列 A を n 次元ベクトル $\mathbf{a}$ に左から かけると $A\mathbf{a}$ は m 次元ベクトルになる そこで

$m \times n$-行列 A に対し

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$$

という写像（関数）を考える

mapping function

$x \in \mathbb{R}^n$ に対し $\varphi_A(x) = Ax$

$$\begin{array}{cc} i & \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \circ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$\sum_j a_{ij} x_j$

φ_A の形の写像は次の性質を持つ：
任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $a, b \in \mathbb{R}$
に対し，$\varphi_A(ax+by) = a\varphi_A(x) + b\varphi_A(y)$
が成り立つ．

証明 $\varphi_A(ax+by)$

$= A(ax+by)$

$= A(ax) + A(by)$

$= aAx + bAy$

$= a\varphi_A(x) + b\varphi_A(y)$ ☒

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が
線形変換 であるとは φ が
（線形写像）

linear transformation
linear mapping

$\boxed{\mathbb{R}^n \text{ を } n \text{ 次元ベクトル空間とよぶ}}$ n-dimensional vector space

(*) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ $a, b \in \mathbb{R}$ に対し

$$\varphi(\underbrace{ax}_{\mathbb{R}^n\text{でのスカラー倍}} \overset{\mathbb{R}^n\text{でのベクトルの和}}{+} by) = \underbrace{a\varphi(x)}_{\mathbb{R}^m\text{でのスカラー倍}} \overset{\mathbb{R}^m\text{でのベクトルの和}}{+} b\varphi(y)$$

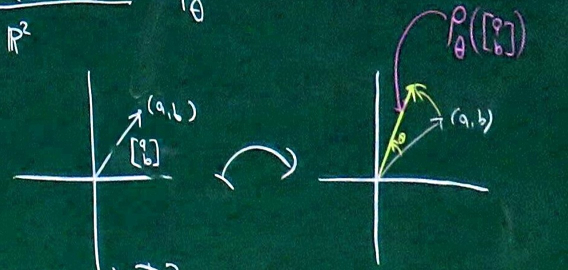
を満たすこととする．

φ_A の形の写像は線形写像である．

定理 すべての線形写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し
$m \times n$-行列 A で $\varphi_A = \varphi$ となるものが，ちょうど1つ存在する．

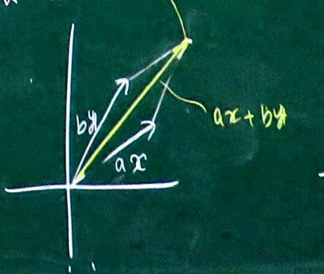
定理の応用 $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

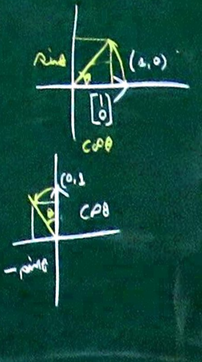
$\mathbb{R}^2$



となるものとする．

ρ_θ は線形写像である





したがって定理から 2×2-行列
R_θ で $\varphi_{R_\theta} = \rho_\theta$ と
なるものが存在する． $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$R_\theta = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ とすると，

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\| \rho_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\| \rho_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$\| \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

行列のかけ算と線形写像の合成

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$

を線形写像として, $m \times n$ 行列 A と $l \times m$ 行列 B が

$$\varphi_A = \varphi$$
$$\varphi_B = \psi$$

となるようにとられているとする.

φ:ファイ　　$\varphi \leftrightarrow f$?
ψ:サイ　　function
プサイ　　=

φ と ψ の合成写像 $\psi \circ \varphi$

$$\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$$
$$x \longmapsto \psi(\varphi(x))$$

このとき $\psi \circ \varphi$ はふたたび線形写像になることが示せるが,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(x) &= \psi(\varphi(x)) \\ &= \psi(Ax) \\ &= B(Ax) \\ &= (BA)x \\ &= \varphi_{BA}(x)\end{aligned}$$

行列のかけ算の結合則

線形写像の合成は行列のかけ算に対応するものになっている。もともと行列の定義はこのことが成り立つことを頭において選ばれていたもの

連立方程式の解法

1次, 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \sim (*)$$

を考える ただし $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ で $x_1 \dots x_n$ 変数記号

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ として $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすると, (*)は

$$Ax = b$$ と書ける

これは "$\varphi_A(x) = b$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ を求めよ" という問題としてとらえることができる.

線形写像の理論を作ることでそれを連立方程式の解法理論として解釈応用できる!