正則行列と逆行列

(可逆行列) inverse

regular matrices
invertible

P.34

正方行列 A ($n\times n$-形の行列) に対して同じタテヨコサイズの行列 B で

$$AB = BA = E$$

となるものがあるとき、B を A の逆行列という。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = E_n$$

すべての A に対 $AE = A$, $EA = A$

単位元が定義されていること

逆行列は存在しないこともある。たとえば、

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A \neq O$ だが、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$AO = O$$
$$OA = O$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

下の補題より、A は逆行列を持たない

補題 行列 $A \neq O$ があるnつのに対して $A^n = O$ となるとき (A がべき零のとき) A には逆行列が存在しない

証明 もし B が逆行列とすると $AB = E$ だが

n を $A^n = O$ となる最小の数とする

$$(A^{n-1}A)B = A^{n-1}\underbrace{AB}_{E} = A^{n-1}E = A^{n-1} \neq O$$

$$(A^{n-1}A)B = A^nB = O$$

となり矛盾。したがってこのような B は存在しない。 ☒

補題 A の逆行列は存在するとすれば、1つにきまる

証明 B と B' がともに A 逆行列として $B = B'$ となることを示す：

exists uniquely

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'.$$ ☒

補題 A が逆行列を持ち任意の正方行列 B に対し $AB = E$ なら B は A の逆行列である

証明 $AB = E$ の両辺に A^{-1} をかけると

$$(A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$$

$$(A^{-1}A)B = EB = B$$ ☒

実はさらに次が言える：

B が A の逆行列のとき、$B = A^{-1}$ と書く

定理 7.4.1 A と B を $n\times n$ 行列とするとき $AB = E$ なら、B は A の逆行列である

A が逆行列を持つことをあらかじめ知らなくても

証明 はあと (P.57) で

この定理は行ヨコが無限サイズの行列に対しては成り立たない。

行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき A は正則 (可逆) であるという。

補題 $B=A^{-1}$ のとき $A=B^{-1}$ である

証明 $B=A^{-1}$ とすると

$BA=AB=E$ だから逆行列の定義から、

A は B の逆行列である つまり $A=B^{-1}$

である. ■

特に $(A^{-1})^{-1}=A$

この記号の使い方を拡張して、

正則行列 A に対し、$k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

$$A^k=\begin{cases}\underbrace{A\cdots A}_{k} & k>0\text{ のとき}\\ E & k=1\text{ のとき}\\ A^{-1}\cdots A^{-1} & k<0\end{cases}$$

と定義する このとき すべての $k,l\in\mathbb{Z}$ に対し、

$A^k\cdot A^l=A^{k+l}$ が成り立つ (演習)

補題 A と B を正則な $n\times n$ 行列とするとき、 とくに $a\in\mathbb{R}, a\neq0$

(1) AB は正則で $B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列となる

(2) aA は正則で $\frac{1}{a}A^{-1}$ が aA の逆行列となる

証明 (1): $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A\underbrace{(BB^{-1})}_{E}A^{-1}=AA^{-1}=E$

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=\cdots=E$ も同様.

(2) $(aA)(\frac{1}{a}A^{-1})=\cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}AA^{-1}=E$

$(\frac{1}{a}A^{-1})(aA)=\frac{1}{\cancel{a}}\cdot\cancel{a}A^{-1}A=E$ //

☒

次が成り立つ

補題 $n\times n$ 行列 A が正則でないなら、どんな $n\times n$ 行列 B に対し AB も BA も正則でない

証明 演習.

定理 2.4.2 A を $n\times n$ 行列で正則とする (n次正則行列) このとき

次は同値である:

(1) $\mathrm{rank}(A)=n$

(2) A の簡約化は E_n である

(3) 任意 $b\in\mathbb{R}^n$ に対し、$Ax=b$ は ちょうど1つの解を持つ

(4) $Ax=0$ は自明でない解を持たない.

(5) A は正則である

唯一の

ただ1つの

同次方程式の連立方程式

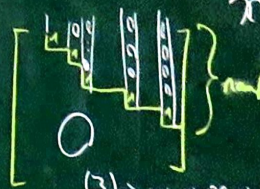
証明 ㋐

㋐ (1) ⇔ (2) は rank の定義から明か

(2) ⇒ (3): $[A\,\vdots\,b]$ を基本変形のくりかえしで変形してゆくと、$[E\,\vdots\,b']$ という形の

(2) から 簡約化が得られるので

$x=b'$ が唯一の解となる



(3) ⇒ (1) は明か ((1) は (3) 特別な場合となっている)

(4) ⇒ (1): ((1)でない ⇒ (4)でない を示せばよい)

1でないなら、A の簡約化は $\begin{bmatrix}E_{\mathrm{rank}A} & \\ 0 & \end{bmatrix}$ $n-\mathrm{rank}A>0$

となるので $Ax=0$ は自明でない解を持つ. ☒

(5)⇒(4): Aが正則として、aを $Ax=0$ の任意の解とするとき $a=0$ となることを示せばよい。

$$Aa=0$$ だから左から A^{-1} をかけると

$$(A^{-1}A)a = A^{-1}(Aa) = A^{-1}0 = 0$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$Ea \qquad\qquad 0$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$a \qquad\qquad 0$$

となりよい。

~~$A[c_1 \cdots c_n] = [e$~~

(3)⇒(5): $e_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ i行 とする。

(3)から、$Ax = e_i^n$ は唯一の解を持つのでそれを c_i とする

このとき $B = [c_1\ c_2 \cdots c_n]$ が Aの逆行列となることを示す。定理2.4.1によりこのためには $AB=E$ を言えばよい。

行列のかけ算の定義

$$AB = A[c_1\ c_2 \cdots c_n] = [Ac_1\ Ac_2 \cdots Ac_n]$$

$$= [e_1^n \cdots e_n^n] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = E,$$

によりよい。 ☒

次も成りたつ

補題 $n \times n$ 行列 Aが正則でないなら、どんな $n \times n$ 行列に対し AB も BA も正則でない

証明 演習。

定理2.4.2 Aを $\overbrace{n \times n}^{n次正則行列}$ 行列で正則とする。このとき次は同値である：

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$

(2) Aの簡約化は E_n である

(3) 任意 $b \in \mathbb{R}^n$ に対し、$Ax=b$ はちょうど1つの解を持つ

同次形の連立方程式

(4) $Ax=0$ は自明でない解を持たない

(5) Aは正則である

ゆいいつの
唯一の
ゆいーの
ただ1つの

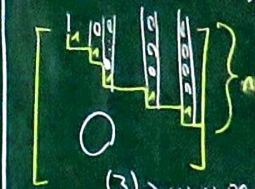
証明 ㋐

(1)⇔(2) は rankの定義から明か

(2)⇒(3): $[A \vdots b]$ を基本変形のくりかえで変形してゆくと、$[E \vdots b']$ という形の

(2)から 簡約化が得られるので

$x = b'$ が唯一の解となる



(3)⇒(1) は明か ((4)は(3)特別な場合となっている)

(4)⇒(1): ((1)でない⇒(4)でないを示せばよい)

1でないなら、Aの簡約化は $\left[\begin{matrix} E_r & \cdots \\ 0 & \cdots \end{matrix}\right]$ $r = \mathrm{rank}\,A$, $n-r \neq 0$

となるので $Ax=0$ は自明でない解を持つ。 ☒

㋑ (5)

B