

復習

$n \in S_n$ に対して n の偶奇性
 $\text{sgn}(\sigma) = 1, -1$ を定義した

↑
 偶数の互換の積とあらわす
 ↑
 奇数の互換の積とあらわす

determinant

$n \times n$ 行列 A に対して A の行列式

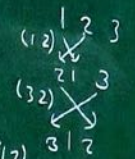
$|A|$ ($\det(A)$...) を $A = [a_{ij}]$ とし

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

例 (1) 1行1列 [a] に対して $|a| = a$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

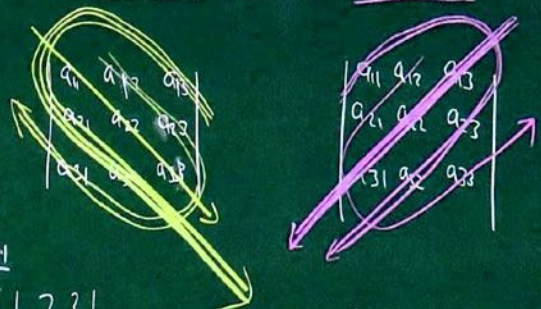
(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (*)$



$S_3 = \{ \epsilon, (12), (23), (31), (123), (321) \}$

ϵ (123) (321)

$$(*) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$



例
 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 \cdot 3 - (1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 3)$
 $= \dots$

定理 3.2.1 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対し $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$\epsilon \neq 1$ は, $\det(A) = a \det(A')$ とし
 又 $a_{11} = a$

証明 $A = [a_{ij}]$ とする
 A の $1 < k < n$ に対して $a_{k1} = 0$ とする

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \text{sgn}(\sigma) a_{11} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$= a \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{n-1\sigma(n-1)} = a \det(A')$

$+ \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) \neq 1}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$
 \Rightarrow $\epsilon \neq 1$ は, $a_{k1} = 0$ の場合 $\det(A) = 0$ とする

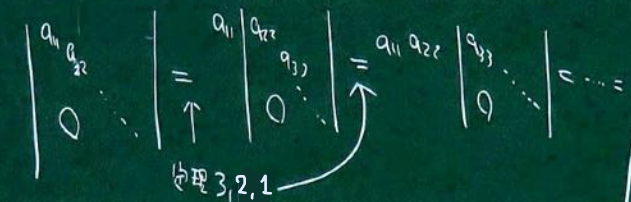
$$\sqrt{6} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (0 + 4 + 3 - (2 + 0 + 0))$$

$$= 3 \cdot 5 = 15$$

上三角行列 $A = \begin{bmatrix} \text{斜線} \\ 0 \end{bmatrix}$ の形の行列

つまり $A = [a_{ij}]$ とし $i > j$ とき $a_{ij} = 0$ のとき



$$= a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} \text{ とは?}$$

$$\text{単位行列 } E_n \text{ の行列は } |E_n| = 1 \text{ である}$$

定理 3.2.2 (1) $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$ のとき $c \in \mathbb{R}$ とし $A' = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ ca_{1n} \end{bmatrix}$ とする

$$\text{すると } |A'| = c |A|$$

3.2.3 (1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \text{ と } A' = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$|A'| = -|A|$$

証明 3.2.2 (1): $A = [a_{ij}], A' = [a'_{ij}]$

$$\begin{aligned} |A'| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots c a_{n\sigma(n)} \\ &= c \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \right) \\ &= c |A| \end{aligned}$$

3.2.3 (1):

$$A = [a_{ij}], A' = [a'_{ij}] \text{ とし}$$

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} \\ a'_{i'j'} &= a'_{ij} \end{aligned}$$

行列の交換

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} -\text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)}$$

$\tau \in S_n \Rightarrow \sigma \mapsto \sigma(\tau^{-1}) \in S_n$ は 1-1 対応

$$= - \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)}$$

$$= -|A|$$

例

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

↑ 例 3.2.3 (2) ↑ 例 3.2.1

$$= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 3.2.2 (2)

$$A = [a_{ij}] \quad A' = [a'_{ij}] \quad A'' = [a''_{ij}] \quad i, j$$

对 $1 \leq i^* \leq m \quad i \neq i^* \quad j$ $a_{ij} = a'_{ij} = a''_{ij}$

$$a''_{i^*j} = a_{i^*j} + a'_{i^*j} \quad i^*, j^* \text{ 是 } i, j$$

那么,

$$|A''| = |A| + |A'|$$

$$A'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i^*} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i^*1} + a'_{i^*1} & \dots & a_{i^*i^*} & \dots & a_{i^*m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi^*} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \leftarrow i^*$$

例 3.2.3 (2)

$$|A''| = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \underbrace{a''_{1\sigma(1)}}_{a_{1\sigma(1)} + a'_{1\sigma(1)}} \dots \underbrace{a''_{i^*\sigma(i^*)}}_{a_{i^*\sigma(i^*)} + a'_{i^*\sigma(i^*)}} \dots \underbrace{a''_{m\sigma(m)}}_{a_{m\sigma(m)} + a'_{m\sigma(m)}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} (\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i^*\sigma(i^*)} \dots a_{m\sigma(m)} + \text{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{i^*\sigma(i^*)} \dots a'_{m\sigma(m)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{m\sigma(m)} + \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{m\sigma(m)}$$

$$= |A| + |A'| \quad \square$$

例 3.2.3 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$1 \leq i^* < j^* \leq m$ 时 $a_{i^*j^*} = a_{j^*i^*} = 0 \Rightarrow |A| = 0$

例 3.2.3 (1) 中

$$|A| = -|A'|$$

那么 $A = A' \Rightarrow |A| = 0$

那么 $|A| = 0$ \square

定理 3.2.4

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times (2) \quad A' = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + ca_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$a_i \neq 0$

$$|A'| = |A|$$

証明

$$|A'| = |A| + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ca_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

Aの*i*行に ca_i を加える
行列

$$= c \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = c \cdot 0$$

3.2.2 (2) 3.2.3 (2)

