## 復習

$\sigma \in S_n$ に対して $\sigma$ の偶奇性

$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1, -1$ を定義して

偶数個の互換の積とあらわせる

奇数個の互換の積とあらわせる

$n \times n$ 行列 $A$ に対してその行列式 (determinant)

$|A|$ ($\det(A)$, $|a_{ij}|$ …) を $A = [a_{ij}]$ として

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

例 (1) 1行1列 $[a]$ に対し $|a| = a$

(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (*)$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow (12) & \\ 2 & 1 & 3 \\ & \downarrow (32) & \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$(13)(12) = (123)$, $(32)(12) = (321)$

$$S_3 = \{\varepsilon, (12), (23), (31), (123), (321)\}$$

sgn: $\varepsilon \to 1$; $(12), (23), (31) \to -1$; $(123), (321) \to 1$

$$(*) = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\varepsilon} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{(123)} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{(321)} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 6\cdot 3 - (1\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 3) = \cdots$$

**定理 3.2.1** $A = \begin{bmatrix} a & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{bmatrix}$ の形をしているときには、$\det(A) = a\det(A')$ となる

また $a_{11} = a$

**証明** $A = [a_{ij}]$ とすると

すべての $1 < k \leq n$ に対して $a_{k1} = 0$ であって

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \overset{a}{a_{11}}\, \overset{a'_{1\sigma(1)}}{a_{2\sigma(2)}} \cdots \overset{a'_{n-1\sigma(n-1)}}{a_{n\sigma(n)}}}_{a \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n-1\sigma(n-1)} \,=\, a\det(A')}$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) \neq 1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\text{ここには、} \overset{=0}{a_{k1}} \text{ の形のものが含まれる}} = 0$$

<u>例</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (0+4+3-(2+0+0))$$

$$= 3 \cdot 5 = 15$$

- <u>上三角行列</u> $A = \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$ の形の行列

つまり $A=[a_{ij}]$ とにて $i>j$ なら $a_{ij}=0$ のときをいう。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ & a_{33} & \\ 0 & & \ddots \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \\ 0 & \ddots \end{vmatrix} = \cdots =$$

定理 3.2.1

$$= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn} \text{ となる。}$$

- 特に $|E_n| = 1$ である。

<u>定理 3.2.2 (1)</u> $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ のとき $c \in \mathbb{R}$ とにて、$A' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ c a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ($i \to$) （$i$行をc倍する）

とおくと、$|A'| = c|A|$

3.2.3 (1)

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ で $A' = \begin{bmatrix} \vdots \\ a \\ a \\ \vdots \end{bmatrix}$ （$i^*$行 →, $j^*$行 →）（$i^*$行と$j^*$行を入れかえる）

$$|A'| = -|A|$$

<u>証明</u> 3.2.2 (1): $A = [a_{ij}]$, $A' = [a'_{ij}]$

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \underline{c}\, a_{i\sigma(i)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \left( \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right)$$

$$= c\,|A|$$

3.2.3 (1):

$A = [a_{ij}]$ $A' = [a'_{ij}]$ とおくと　$i \neq i^*, j^*$ のときは $a'_{ij} = a_{ij}$, $a'_{i^*j} = a_{j^*j}$, $a'_{j^*j} = a_{i^*j}$

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{i^*\sigma(i^*)} \cdots a'_{j^*\sigma(j^*)} \cdots$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j^*\sigma(i^*)} \cdots a_{i^*\sigma(j^*)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} -\mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{i^*\underbrace{\sigma(j^*)}_{\tau(i^*)}} \cdots a_{j^*\underbrace{\sigma(i^*)}_{\tau(j^*)}} \cdots$$

$\tau = \sigma \circ (i^*\ j^*)$

ここで $S_n \ni \sigma \longmapsto \sigma \circ (i^*\ j^*) \in S_n$ は 1-1 なので、

$$= -\sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{i^*\tau(i^*)} \cdots a_{j^*\tau(j^*)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$= -|A|$$

## 例

$$\begin{vmatrix} 0&0&1&2\\ 3&1&2&3\\ 0&2&1&3\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix} = (-1)\times\begin{vmatrix} 3&1&2&3\\ 0&0&1&2\\ 0&2&1&3\\ 0&1&1&0 \end{vmatrix} =$$

定理3.2.3 (1)　　定理3.2.1

$$= (-1)\times 3\times\begin{vmatrix} 0&1&2\\ 2&1&3\\ 1&1&1 \end{vmatrix}$$

## 定理3.2.2 (2)

$A=[a_{ij}]$　$A'=[a'_{ij}]$　$A''=[a''_{ij}]$ とし

ある $1\le i^*\le n$ に対し、$i\ne i^*$ ならば $a_{ij}=a'_{ij}=a''_{ij}$

$a''_{i^*j}=a_{i^*j}+a'_{i^*j}$ となっているとする

このとき、

$$|A''|=|A|+|A'|$$

$$A''=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ & & & \\ a_{i^*1}+a'_{i^*1} & \cdots\cdots & & a_{i^*n}+a'_{i^*n} \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow i^*$$

## 証明

$$|A''| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a''_{1\sigma(1)}}_{=a_{1\sigma(1)}=a'_{1\sigma(1)}} \cdots \underbrace{a''_{i^*\sigma(i^*)}}_{=(a_{i^*\sigma(i^*)}+a'_{i^*\sigma(i^*)})} \cdots \underbrace{a''_{n\sigma(n)}}_{=a_{n\sigma(n)}=a'_{n\sigma(n)}}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\Big(\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i^*\sigma(i^*)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)}\cdots a'_{i^*\sigma(i^*)}\cdots a'_{n\sigma(n)}\Big)$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}}_{=|A|} + \underbrace{\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)}\cdots a'_{n\sigma(n)}}_{=|A'|}$$

$$= |A|+|A'| \qquad \boxtimes$$

## 定理3.2.3 (2)

$A=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ で

$1\le i^*<j^*\le n$ に対し $\mathbf{a}_{i^*}=\mathbf{a}_{j^*}$ ならば $|A|=0$

**証明** $A$ の $i^*$ 行と $j^*$ 行を入れかえて得られる行列を $A'$ とすると、3.2.3 (1) から

$$|A|=-|A'|$$

一方仮定から $A=A'$ なので、

$$|A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$$

となることがわかる。 $\boxtimes$

定理 3.2.4

$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ として

$i^* \neq j^*$ で

$$A'=\begin{array}{c} \\ i^* \rightarrow \\ \\ j^* \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j^*}+ca_{i^*} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Aの $j^*$ 行に $i^*$ 行 c倍を加えて得られる行列

のとき

$$|A'| = |A|$$

証明

$$|A'| = |A| + \left|\begin{array}{c} \\ \\ j^* \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ca_{i^*} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right| \underset{3.2.2\,(1)}{=} c\left|\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i^*} \\ \vdots \\ a_{i^*} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right| \underset{3.2.3\,(2)}{=} c\cdot 0$$

[redacted]