数理論理学

mathematical logic

$p = s$
$q = r$

渕野昌 (Sakaé Fuchino)

http://fuchino.ddo.jp/kobe/

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

命題論理 (sentencial logic, propositional logic)

述語論理 (predicate logic)

命題論理

semantic

syntactic

方法 method　方法論 methodology

syntactic 構文　文, 主張に対応する「論理式」を導入

形式的な証明 formal の体系を導入

semantic 意味論　論理式の解釈のしかたを定義する…

完全性：形式的な証明の体系が意味論に対して完全なものになっているか

健全性：形式的な証明の体系が意味論とうまくかみあっているか

§ 命題論理

命題記号とよばれる記号を無限個用意しておく
(命題変数)

$A, B, C, A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots$

(propositional symbols, propositional variables)

PropVar で命題変数の全体をあらわす.

"$A \in \mathrm{PropVar}$" は ↗

解釈したとき正しい論理式はすべて形式的に証明できるか

ここでの議論は(仮想的な)紙の上に書かれた記号列(書かれうることになる)に関するものだと考える.

"Aを命題変数とする" という主張の略記だと考える.

命題変数とは異なる次の6つの記号を用意する:

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, (,)$

命題記号と上の6つの記号(のうちのいくつか)からなる記号列が(命題論理の)論理式であるということを次のように再帰的に定義する.

(1) 命題記号は（長さが1の記号列として）論理式である

(2) φ, ψ が論理式なら

$\neg\varphi,\ (\varphi\wedge\psi),\ (\varphi\vee\psi),\ (\varphi\to\psi)$ は論理式である

$\neg\hat{}\varphi \qquad (\hat{}\varphi\hat{}\wedge\hat{}\psi\hat{})$

(3) 以上のみ

論理式は以上のようなくりかえしで得られる記号列のみ

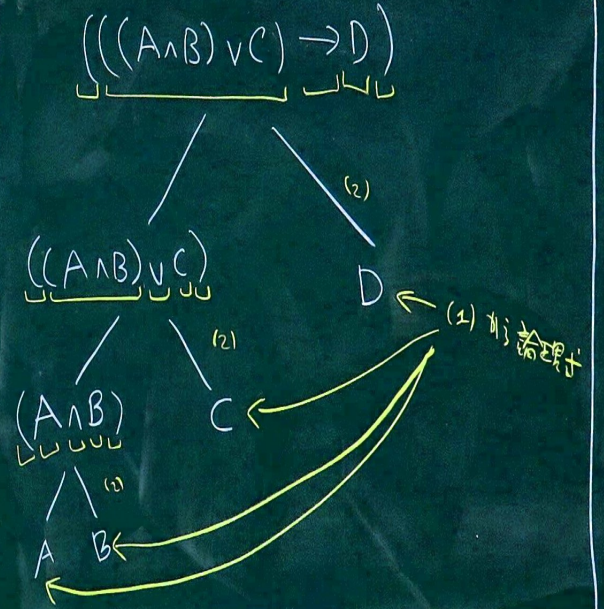
例　A B C … を命題変数とするとき

$(((A\wedge B)\vee C)\to D)$

$(\neg A\wedge\neg B)$ などは論理式

$((A,\ \neg((B))$ などは論理式でない

φ を論理式とするときに "φ にあらわれる命題変数はすべて $A_1,\cdots,A_n$ の中に含まれる" という主張を $\varphi=\varphi(A_1,\cdots,A_n)$ であらわす。



$\varphi=\varphi(A_1,\cdots,A_n)$ は φ の構成に関する帰納法により次のように（再帰）定義できる

(1) φ が命題変数のときには φ を B として

$\varphi=\varphi(A_1,\cdots,A_n) \iff$ B は $A_1,\cdots,A_n$ のうちのどれか

(2) (a) φ が $\neg\varphi_1$ の形をしているときには，

$\varphi=\varphi(A_1,\cdots,A_n) \iff \varphi_1=\varphi_1(A_1,\cdots,A_n)$

(b) φ が $(\varphi_1\wedge\psi_1),\ (\varphi_1\vee\psi_1),\ (\varphi_1\to\psi_1)$ のどれかの形をしているとき

$\varphi=\varphi(A_1,\cdots,A_n) \iff \varphi_1=\varphi_1(A_1,\cdots,A_n)$ かつ $\psi_1=\psi_1(A_1,\cdots,A_n)$

$\mathbb{2}$ で $\{0,1\}$ をあらわす.

0 off 偽

1 on 真

と解釈する

目標:

$\varphi = \varphi(A_1, \dots, A_m)$ に対し

$$f_{\varphi(A_1, \dots, A_m)} : \mathbb{2}^m \longrightarrow \mathbb{2}$$

を対応させる

$$\left\{ \begin{matrix} (i_1 \cdots i_m) \\ (0 \, 1 \cdots 0) \end{matrix} \;\middle|\; i_1, \dots, i_m \in \mathbb{2} \right\}$$

これを φ の解釈として考える

$f_{\varphi(A_1 A_2 A_3)}(0,1,1) = 1$ とは

"A_1 は偽 A_2 は真 A_3 が真のとき

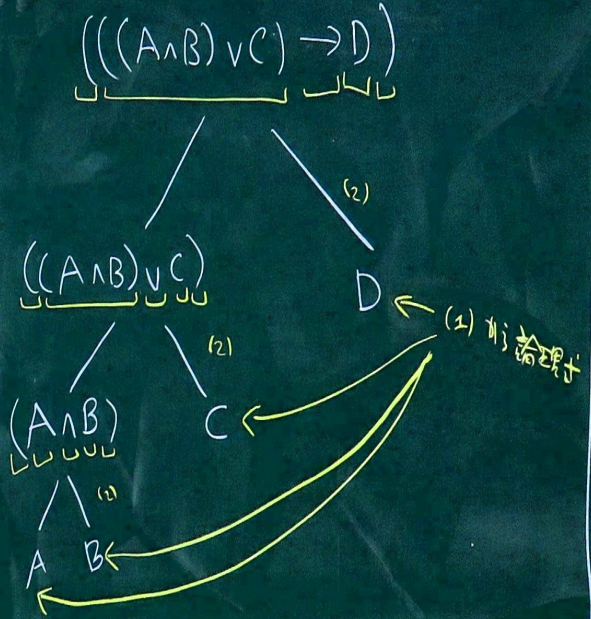
φ は真である" と解釈する

$f_{\varphi(\cdots)}$ をうまく定義して

$\neg \ \wedge \ \vee \ \rightarrow$ が へ でない かつ または

ならば と解釈されているような

ものにする.



$\varphi = \varphi(A_1, \dots, A_m)$ は φ の構成に関する帰納法により次のように定義できる (再帰)

(1) φ が命題変数のときには φ を B として

$\varphi = \varphi(A_1, \dots, A_m) \Longleftrightarrow B$ は $A_1, \dots, A_m$ のうちのどれか

(2) (a) φ が $\neg \varphi_1$ の形をしているときには,

$\varphi = \varphi(A_1, \dots, A_m) \Longleftrightarrow \varphi_1 = \varphi_1(A_1, \dots, A_m)$

(b) φ が $(\varphi_1 \wedge \psi_1), (\varphi_1 \vee \psi_1), (\varphi_1 \rightarrow \psi_1)$ のどれかの形をしているとき

$\varphi = \varphi(A_1, \dots, A_m) \Longleftrightarrow \varphi_1 = \varphi_1(A_1, \dots, A_m)$ かつ

$\psi_1 = \psi_1(A_1, \dots, A_m)$