Recap: $\varphi$は命題論理の論理式である、ということを次のように再帰的に定義する

(1) 命題変数は(長さが1の記号列として)論理式である。

(2) $\varphi$と$\psi$が論理式なら、

$\neg\varphi$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$

$(\varphi\to\psi)$は論理式

(3) 以上のみ

$\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$ : $\varphi$にあらわれる命題変数はすべて$A_1,\dots,A_n$のうちのどれかである

$\mathbb{2}=\{0,1\}$とする

0: 偽 false

1: 真 true

$\mathbb{2}^n=\{(i_1,\dots,i_n)\mid i_1\cdots i_n\in\mathbb{2}\}$

$\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$に対し、

$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}:\mathbb{2}^n\to\mathbb{2}$

$\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$のブール関数 Boolean function

を再帰的に次のように定義する。

(1) $\varphi(A_1,\dots,A_n)$が$A_k$のとき、

$f_{\varphi(A_1\cdots A_n)}(i_1,\dots,i_n)=i_k$とする。

(2) ($f_{\varphi_1(A_1,\dots,A_n)}$と$f_{\varphi_2(A_1,\dots,A_n)}$がすでに定義されているとして)

(a) $\varphi=\neg\varphi_1$のとき、

$$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n)=\begin{cases}1 & f_{\varphi_1(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=0 \text{ のとき}\\ 0 & f_{\varphi_1(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

(b) $\varphi=(\varphi_1\vee\varphi_2)$のとき、

(c) $\wedge$

$$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n)=\begin{cases}1 & f_{\varphi_1(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=1 \text{ または かつ } f_{\varphi_2(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その以外のとき}\end{cases}$$

AまたはB

(AとBの少くとも1つが)

(d) $\varphi$ が $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ のとき

$$f_{\varphi_1(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n) = \begin{cases} 1 & f_{\varphi_1(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=0 \\ & \text{または} \\ & f_{\varphi_2(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=1 \\ & \text{のとき} \\ 0 & f_{\varphi_1(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=1 \\ & \text{かつ} \\ & f_{\varphi_2(A_1,\dots)}(i_1,\dots,i_n)=0 \\ & \text{のとき.} \end{cases}$$

## 僕が象だ君はブタだ

**問題点** たとえば, $\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$ のときには

$\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n,A_{n+1})$ でもあるが, このとき,

$$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n) = f_{\varphi(A_1,\dots,A_n,A_{n+1})}(i_1,\dots,i_n,i_{n+1})$$

となっているか?

OK. $\varphi$ の構成に関する帰納法で示せる

$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}$ を $\varphi(A_1,\dots,A_n)$ の ブール関数
表現関数
解釈
ブール解釈

$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)} = f_{\psi(A_1,\dots,A_n)}$ のとき,

$\varphi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$ と $\psi=\varphi(A_1,\dots,A_n)$ は意味論的に同値 (semantically equivalent) といい これを

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$$

$\models\!\!\!\dashv$ ↑ ダミーも含めた変数のリスト $A_1,\dots,A_n$ には依存しない!

**例** $(A\to B)$ と $(\neg A\vee B)$ は意味論的に同値である:

| $A$ | $B$ | $f_A$ | $f_B$ | $f_{(A\to B)}$ | $f_{\neg A}$ | $f_{(\neg A\vee B)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

すべての $(i_1,\dots,i_n)\in 2^n$ に対して

$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n)=1$ のとき、 $=0$ のとき

$\varphi$ はトートロジーであるという。
(tautology)

$\varphi$ は矛盾するという (contradiction)

例えば $(A\wedge\neg A)$ は矛盾する

$(A\vee\neg A)$ はトートロジーである

**補題** $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を論理式とするとき次が成り立つ:

(4) (1) $(\varphi_0\wedge\varphi_0)\models\!\dashv\varphi_0$

(5) (2) $(\varphi_0\wedge\varphi_1)\models\!\dashv(\varphi_1\wedge\varphi_0)$

(6) (3) $((\varphi_0\wedge\varphi_1)\wedge\varphi_2)\models\!\dashv(\varphi_0\wedge(\varphi_1\wedge\varphi_2))$

(7) $\neg\neg\varphi_0\models\!\dashv\varphi_0$

(8) $(\varphi_0\vee\varphi_1)\models\!\dashv\neg(\neg\varphi_0\wedge\neg\varphi_1)$

(9) $(\varphi_0\wedge\varphi_1)\models\!\dashv\neg(\neg\varphi_0\vee\neg\varphi_1)$

(10) $(\varphi_0\to\varphi_1)\models\!\dashv(\neg\varphi_0\vee\varphi_1)$

"$\dashv$" に対しては同様の主張は一般に成り立たない!

**(10)の証明** $\varphi_0=\varphi_0(A_1,\dots,A_n)$ として、
$\varphi_1=\varphi_1(A_1,\dots,A_n)$

すべての $(i_1,\dots,i_n)\in 2^n$ に対して、

(*) $f_{(\varphi_0\to\varphi_1)(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n)=f_{(\neg\varphi_0\vee\varphi_1)(A_1,\dots,A_n)}(i_1,\dots,i_n)$

となることを示せばよい。

**場合1** $f_{\varphi_0}(i_1,\dots,i_n)=0$ かつ $f_{\varphi_1}(i_1,\dots,i_n)=0$ のとき

右辺から (*) が成り立つ。

**場合2** … $=0$ かつ … $=1$ のとき

⋮

**例** $(\varphi_0\to\varphi_1)$ と $(\neg\varphi_0\vee\varphi_1)$ は意味論的に同値である:

| $f_{\varphi_0}$ | $f_{\varphi_1}$ | $f_{(\varphi_0\to\varphi_1)}$ | $f_{\neg\varphi_0}$ | $f_{(\neg\varphi_0\vee\varphi_1)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |