復習：定理3（健全性定理）

Soundness Theorem

$\Gamma \neq \phi$ $\Delta \neq \phi$ のとき

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が（LKで）証明可能

$\Rightarrow$ $(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$ はトートロジー

証明 LKでの $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明の高さに関する帰納法。 ⊠

定理4（完全性定理）

Completeness Theorem

$\Gamma \neq \phi$ $\Delta \neq \phi$ のとき

$(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$ がトートロジー $\Rightarrow$ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ はLKで証明可能

定理4の証明はこの補題を用いて行う。

補題5（完全性の補題）

任意の命題論理の論理式の集合 Γ（ここでは有限集合を考えるが無限集合でも同様に示せる）に対し

Γ が充足可能でないなら、Γ は（論理的に）矛盾する

コメント：Γ が充足可能であるとは ある付値 v に対し、$v \models \Gamma$ となる。したがって Γ が充足可能でないとは、どんな付値 v に対しても $v \not\models \Gamma$（つまり少くとも1つの $\varphi \in \Gamma$ があって $v \not\models \varphi$）Γ が（論理的に）矛盾するとは、$\Gamma \Rightarrow$ がLKで証明できること。（Γ が無限の場合は、ある有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し、$\Gamma' \Rightarrow$ がLKで証明できること）Γ が無矛盾である とは Γ が論理的に矛盾しないこと

consistent non-contradictory

つまり、$\Gamma \Rightarrow$ がLKで証明できないこと

完全性定理の完全性の補題からの証明

完全性定理の主張の対偶：

$\Gamma \neq \phi$, $\Delta \neq \phi$ なら $\Gamma \Rightarrow \Delta$ がLKで証明できないなら、$(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$ はトートロジーでない

を示す。

コメント：命題論理の論理式 φ がトートロジーとはすべての付値 v に対して、$v \models \varphi$ となること

したがって φ がトートロジーでないとは、ある付値 v に対して $v \not\models \varphi$ となること。

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能でないなら、$\Gamma, \neg \bigvee \Delta \Rightarrow$ は証明可能でない

したがって、$\Gamma, \neg \bigvee \Delta \Rightarrow$ は無矛盾なので（論理的に矛盾しない）

補題5（の対偶から）$\Gamma, \neg \bigvee \Delta$ は充足可能である。つまり付値 v で $v \models \Gamma, \neg \bigvee \Delta$ となるものがある。このとき $v \models \Gamma$ $v \not\models \bigvee \Delta$

$\Downarrow$

$v \models \bigwedge \Gamma$

なので $v \not\models (\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta)$

したがって $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ はトートロジーでない。 ⊠

論理式の部分論理式

subformula

論理式 φ に対して φ の部分論理式の全体 $subfml(\varphi)$ を与える関数 $subfml(\cdot)$ を φ の構成に関する帰納法（再帰）で次のように定義する：

- φ が命題記号 A のときは、$subfml(\varphi) = \{A\}$ とする
- φ が $\neg\psi$ という形をしていて $subfml(\psi)$ がすでに定義されているとき $subfml(\varphi) = subfml(\psi) \cup \{\varphi\}$ とする
- φ が $(\psi_0 \vee \psi_1)$ という形をしていて、 ⑦

定理4の証明はこの補題を用いて行う。

補題5（完全性の補題）

任意の命題論理の論理式の集合 Γ（ここでは有限集合を考えるが無限集合でも同様に示せる）に対し

Γ が充足可能でないなら、Γ は（論理的に）矛盾する

コメント：Γ が充足可能であるとはある付値 v に対し、$v \models \Gamma$ となる。したがって Γ が充足可能でないとは、どんな付値 v に対しても $v \not\models \Gamma$（つまり少くとも1つの $\psi \in \Gamma$ があって $v \not\models \psi$）Γ が論理的に矛盾するとは、$\Gamma \Rightarrow$ が LK で証明できること。（Γ が無限の場合は、ある有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し、$\Gamma' \Rightarrow$ が LK 証明できること）Γ が無矛盾であるとは Γ が論理的に矛盾しないこと

consistent non-contradictory

つまり、$\Gamma \Rightarrow$ が LK で証明できないこと

⑦ $subfml(\psi_0)$ と $subfml(\psi_1)$ がすでに定義されているとき、

$subfml(\varphi) = subfml(\psi_0) \cup subfml(\psi_1) \cup \{\varphi\}$

とする。ここで、ψ が φ の部分論理式である subformula ということを、$\psi \in subfml(\varphi)$ となることと定義する。

・$subfml(\varphi)$ はすべての φ に対し有限である。

補題5の証明のスケッチ

補題5の対偶：

Γ が無矛盾 $\Longrightarrow$ Γ はモデルを持つ

を示す。

$v \models \Gamma$ のとき v を Γ のモデルという

Γ が無矛盾として、Γ に含まれる論理式の部分論理式の全体を $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ とならべておく。$\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_k$ を次を成り立たせるように作ってゆく

(1) Γ_i は無矛盾である $(1 \leq i \leq k)$

(2) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\varphi_{i+1}\}$ または $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_{i+1}\}$

これは可能！

このとき

Claim すべての $1 \leq i \leq k$ に対し、$\varphi_i \in \Gamma_k$ または $\neg\varphi_i \in \Gamma_k$ のちょうど1つが成り立つ。特に Γ に含まれている論理式 φ にあらわれる命題変数 A は φ の部分論理式なので $A \in \Gamma_k$ または $\neg A \in \Gamma_k$ のどちらか1つだけが成り立つ。

↗ $v^*: \mathrm{Provar} \to 2$ を次のように定める

$$v^*(A) = \begin{cases} 1 & A \in \Gamma_k \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

Claim $v^* \models \Gamma_k$ （したがって $v^* \models \Gamma$）

証明 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \cup \{\neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_k\}$ （$\supseteq \Gamma_k$）に含まれる論理式 φ の構成に関する帰納法で、

$\varphi \in \Gamma_k$ なら $v^* \models \varphi$

を示せばよい。 ⊠

したがって $\Gamma (= \Gamma_0)$ はモデル v^* を持つ。 ⊠

定理4の証明はこの補題を用いて行う。

補題5（完全性の補題）

任意の命題論理の論理式の集合（ここでは有限集合を考えるが無限集合でも同様に示せる）に対し $\underbrace{\text{集合}}_{\Gamma}$

Γ が充足可能でないなら、Γ は（論理的に）矛盾する

コメント：Γ が充足可能であるとは ある付値 v に対し、$v \models \Gamma$ となる。したがって Γ が充足可能でないとは、どんな付値 v に対しても $v \not\models \Gamma$（つまり少くとも1つの $\varphi \in \Gamma$ があって $v \not\models \varphi$）Γ が論理的に矛盾するとは、$\Gamma \Rightarrow$ が LK で証明できること。（Γ が無限の場合は、ある有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し、$\Gamma' \Rightarrow$ が LK 証明できること）Γ が無矛盾であるとは Γ が論理的に矛盾しないこと

consistent non-contradictory

つまり、$\Gamma \Rightarrow$ が LK で証明できないこと

↗ $\mathrm{subfml}(\psi_0)$ と $\mathrm{subfml}(\psi_1)$ がすでに定義されているとき、

$$\mathrm{subfml}(\varphi) = \mathrm{subfml}(\psi_0) \cup \mathrm{subfml}(\psi_1) \cup \{\varphi\}$$

とする。ここで、ψ が φ の部分論理式である

subformula

ということを、$\psi \in \mathrm{subfml}(\varphi)$ となることと定義する。

$\mathrm{subfml}(\varphi)$ はすべての φ に対し有限である。

補題5の証明のスケッチ

補題5の対偶：

Γ が無矛盾 $\Longrightarrow$ Γ はモデルを持つ

を示す。

$v \models \Gamma$ のとき v を Γ のモデルという

Γ が無矛盾として、Γ に含まれる論理式の部分論理式の全体を $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ と並べておく。$\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_k$ を

これを成り立たせるように作っていく

(1) Γ_i は無矛盾である （$1 \leq i \leq k$）

(2) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\varphi_{i+1}\}$ または $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_{i+1}\}$

これは可能！

このとき

Claim すべての $1 \leq i \leq k$ に対し、$\varphi_i \in \Gamma_k$ または $\neg\varphi_i \in \Gamma_k$ のちょうど1つが成り立つ。特に Γ に含まれている論理式にあらわれる $\underbrace{\text{命題変数}}_{A}$ は φ の部分論理式なので $A \in \Gamma_k$ または $\neg A \in \Gamma_k$ のどちらか1つだけが成立つ。

↗