復習：言語 $\mathcal{L} = \{c_i \mid i \in I\} \cup \{f_j \mid j \in J\} \cup \{r_k \mid k \in K\}$

↑定数記号　↑関数記号　↑関係記号

に対して、$\mathcal{L}$-項と $\mathcal{L}$-論理式を再帰的に定義した $\mathcal{L}$-構造とは、

$$\mathfrak{A} = \langle A, c_i^{\mathfrak{A}}, f_j^{\mathfrak{A}}, r_k^{\mathfrak{A}} \rangle_{i \in I,\, j \in J,\, k \in K}$$

という形をしているもので、$A \neq \emptyset$　$c_i^{\mathfrak{A}} \in A,\ i \in I$ 台集合 (universe, domain)

f_jの変数の数

$f_j^{\mathfrak{A}} : A^m \to A,\ j \in J$

$r_k^{\mathfrak{A}} \subseteq A^m$　$k \in K$

r_kの変数の数

目標：$x_1, \dots, x_n$ が $\mathcal{L}$-論理式 φ に"自由に"あらわれる変数をもっているとき、$a_1, \dots, a_n \in A$ に対して、

↗

↗ 変数 $x_1, \dots, x_n$ に $a_1 \dots a_n$ を代入したとき φ が構造 $\mathfrak{A}$ で成り立つ（記号：$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$）というサイネンを ゲニミリット定義したい。

値を代入できるような変数といわれる

$\mathcal{L}$-項 t の構成に関する帰納法で t の（自由）変数の全体 $\mathrm{free}(t)$ を定義する。

(1a) t が変数記号 x のとき $\mathrm{free}(t) = \{x\}$

(1b) t が $\mathcal{L}$ の定数記号 c のとき、$\mathrm{free}(t) = \emptyset$

(2) f が $\mathcal{L}$ の m 変数関数記号で $t_1, \dots, t_m$ が $\mathcal{L}$-項で $t = f(t_1, \dots, t_m)$ のとき、

$$\mathrm{free}(t) = \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2) \cup \dots \cup \mathrm{free}(t_m)$$

$\mathcal{L}$-論理式 φ の構成に関する帰納法で φ の自由変数の全体 $\mathrm{free}(\varphi)$ を以下のように定義する：

(1) φ が $t_1 \equiv t_2$（t_1, t_2 は $\mathcal{L}$-項）のとき、

$$\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2),$$

(2) r が $\mathcal{L}$ の m-変数の関係記号で、$t_1, \dots, t_m$ が $\mathcal{L}$-項で φ は $r(t_1, \dots, t_m)$ のとき、

$$\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{free}(t_m),$$

(3a) φ が $\neg\psi$ のとき $\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi)$

(3b) φ が $(\psi_0 \vee \psi_1), (\psi_0 \wedge \psi_1), (\psi_0 \to \psi_1)$ のどれかのとき、

$$\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi_0) \cup \mathrm{free}(\psi_1)$$

(4) φ が $\exists x \psi$ または $\forall x \psi$ の形をしているとき、

$$\mathrm{free}(\varphi) = \mathrm{free}(\psi) \setminus \{x\}$$

$\exists x \psi$　$\exists x \psi$ の形の論理式で x は ψ の中で束縛 bounded されている という

$\mathcal{L}$-項 t に対し $\mathrm{free}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ となることを $t = t(x_1, \dots, x_n)$ と表わす。

$\mathcal{L}$-論理式 φ に対し $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ となることを $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ で表わす。

ここで、$\mathcal{L}$-項 $t = t(x_1, \dots, x_n)$ に対し、t の $\mathfrak{A}$ での解釈 $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n) : A^n \to A$ を t の構成に関する帰納法で次のように定義する（ただし、$l = 0$ のときには、$t^{\mathfrak{A}}$ は A の元とする）

(1a) t が変数記号 x のとき このときには $x = x_i$（$1 \le i \le n$）となるが $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n) : A^l \to A;\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$ とする

(1b) t が定数記号 c のとき、

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n) : A^l \to A;\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto c^{\mathfrak{A}}$$

(2) f が $\mathcal{L}$ の n 変数の関数記号で

$t = f(t_1, \dots, t_l)$ で $t_i = t_i(x_1, \dots, x_k)$ のとき

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_k) : A^k \to A$$

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto f^{\mathfrak{A}}(\underbrace{t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)}_{\in A}, \dots, \underbrace{t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)}_{\in A})$$

$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ と $a_1, \dots, a_k \in A$ に対して、$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$ を φ の構成に関する帰納法で定義する。

(1) φ が $t_1 \equiv t_2$ で $t_1 = t_1(x_1, \dots, x_k)$, $t_2 = t_2(x_1, \dots, x_k)$ のとき

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = t_2^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)$ とする。

(2) r が $\mathcal{L}$ の m 変数の関係記号で

$t_1 = t_1(x_1, \dots, x_k)$, …, $t_m = t_m(x_1, \dots, x_k)$ で

$\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$ のとき、

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff (t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k), \dots, t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)) \in r^{\mathfrak{A}}$

とする。

(3a) φ $\neg\psi$ のとき $(\neg\psi = \neg\psi(x_1, \dots, x_l))$

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_k)$ でないとき、

(3b) (a) φ が $(\psi_0 \vee \psi_1)$ のとき、$(\psi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_l))$

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{A} \models \psi_0(a_1, \dots, a_k)$ または $\mathfrak{A} \models \psi_1(a_1, \dots)$

(b) φ が $(\psi_0 \wedge \psi_1)$ のとき $(\psi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_l))$

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{A} \models \psi_0(a_1, \dots, a_k)$ かつ $\mathfrak{A} \models \psi_1(a_1, \dots)$

(8) φ が $(\psi_0 \to \psi_1)$ のとき $(\psi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_l))$

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{A} \models \psi_0(a_1, \dots, a_k)$ でないか

または $\mathfrak{A} \models \psi_1(a_1, \dots, a_k)$

(4b) $\forall x \psi$

(4a) φ が $\exists x \psi$ のとき φ の自由変数のリスト $x_1 \dots x_l$ を必要なら拡張して、$x_1 = x$ として x がダミーとしてリストに含まれているとする。このときには

$\psi = \psi(x_1, \dots, x_l)$ となっているが、

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1 \dots a_m) \iff$ あるいは ある $b \in A$ に対して

$\mathfrak{A} \models \psi(b\, a_2 \dots a_m)$ となること

とする。このとき、$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ は a_1 によらないので

(かどうかは)

x を含まない変数のリストについても この定義から $\mathfrak{A} \models \varphi(\dots)$ がうまく導入される

φ が自由変数を含まないとき φ は

$\mathcal{L}$-文 ($\mathcal{L}$-sentence) と (定義域 $\mathrm{dom}(\psi) = \phi$ のとき)

呼ばれる。$\mathcal{L}$-文については

$\mathfrak{A} \models \varphi$ かどうかが議論できる

例 $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}} \rangle$

$\mathfrak{A} \not\models \forall x (\underbrace{x + 0}_{+(x,0)} \equiv 0)$

$\mathfrak{A} \models \forall x (x + 0 \equiv x)$

⋮