復習と補足

L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, \cdots \rangle$ に対し,

$f : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$ (f は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像 isomorphism)

とは $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ で $\cdots$ により定義された

$f : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$

で $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が L-論理式で $a_1, \ldots, a_n \in A$

なら $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$

$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像 (isomorphism) が存在するとき, $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は同型 (isomorphic) であるといい $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ と

表わす

<u>系</u> $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ なら任意の L-文に対し, $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ となる.

特に $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ なら, $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

理論の例の補足

初等平面幾何の理論 (Tarski の公理系) 1940年代

$\mathcal{L} = \{\beta, \delta\}$ 4変数関係記号 3変数の関係記号

$\mathcal{G}^n = \langle \mathbb{R}^n, \beta^{\mathcal{G}^n}, \delta^{\mathcal{G}^n} \rangle$ ただし

$\beta^{\mathcal{G}^n} = \{(a, b, c) \in (\mathbb{R}^n)^3 \mid$ 点 a と点 c をむすぶ線分の上に b がある $\}$

または a=b=c

$\delta^{\mathcal{G}^n} = \{\langle a, b, c, d \rangle \in (\mathbb{R}^n)^4$; 直線 $\overline{ab}$ と直線 $\overline{cd}$ は平行である $\}$

または a=b かつ c=b

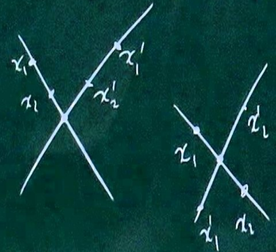
L-文 φ で

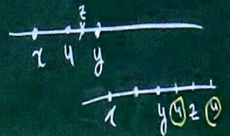
$\mathcal{G}^n \models \varphi \Leftrightarrow n = 2$ がとれる.

[$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_1' \forall x_2' (\neg \delta(x_1, x_2, x_1', x_2') \rightarrow$

$\exists x ((\beta(x_1, x, x_2) \wedge \beta(x_1', x, x_2')) \vee \cdots))$

を φ としてとればよい]





次のような公理系は, $Th(\mathcal{G}^2)$ の公理化になっている: (以下論理式 ψ と書いてときには ψ の $\forall$-閉包を考えている)

A_1 $\beta(x, y, x) \rightarrow x \equiv y$

A_2 $(\beta(x, y, u) \wedge \beta(y, z, u)) \rightarrow \beta(x, z, y)$

A_3 $(\beta(x, y, z) \wedge \beta(x, y, u) \rightarrow \beta(x, z, u) \vee \beta(x, u, z))$

A_4 $\delta(x, y, y, x)$ A_5 $\delta(x, y, z, z) \rightarrow x \equiv y$

--- A_{13} (http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf)

例 $L_{PA} = \{0, S, +, \cdot\}$ とする

1変数関数記号　2変数の関数記号

L_{PA}-構造

$\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}} \rangle$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$0^{\mathbb{N}}$：自然数0

$S^{\mathbb{N}}$：n を $n+1$ にうつす関数

$+^{\mathbb{N}}$：自然数のたし算

$\cdot^{\mathbb{N}}$：自然数のかけ算

$Th(\mathfrak{N})$ の具体的な公理化は存在しえない

（ゲーデルの不完全性定理（の一部））

しかし $\mathfrak{N}$ の性質を"よく"反映する（自然な）公理系をとることはできる（ペアノ算術）

Peano arithmetic　PA

これは以下の公理からなる：

P_1：$x \not\equiv y \rightarrow S(x) \not\equiv S(y)$

P_2：$0 \not\equiv x \rightarrow \exists y \, (S(y) \equiv x)$

P_3：$0 \not\equiv S(x)$

a_1：$x + 0 \equiv x$

a_2：$x + S(y) \equiv S(x+y)$

m_1：$x \cdot 0 \equiv 0$

m_2：$x \cdot S(y) \equiv x \cdot y + x$

各 L-論理式 $\varphi = \varphi(x, \bar{x})$ に対する

$(\bar{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n)$

P_φ：$((\varphi(0, \bar{x}) \wedge \forall x (\varphi(x, \bar{x}) \rightarrow \varphi(S(x), \bar{x}))) \rightarrow \forall x \, \varphi(x, \bar{x}))$

古典的な数学の結果のほとんどについて，それが

（19世紀〜20世紀初頭くらいまでの数学）[redacted] L_{PA}-論理式で記述できる場合は，それはすでにPAで証明できる．

述語論理と命題論理の関係

言語 L を固定しておく．

命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_m)$ に対し，$\varphi_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$，…，$\varphi_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ をL-論理式とするとき すべての L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し，

$\mathfrak{A} \models \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)(a_1, \ldots, a_n)$

$A_1 \cdots A_m$ に $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ を代入してえられるL-論理式
これがL-論理式になることはφに関する帰納法で示せる．

$\Leftrightarrow$ $\tau_i = \begin{cases} 1 ; \mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n) \text{ のとき} \\ 0 ; \text{そうでないとき} \end{cases}$ $(1 \leq i \leq m)$

として，

$f_{\varphi(A_1 \cdots A_m)}(\tau_1, \ldots, \tau_m) = 1$

証明 φに関する帰納法 □

L-論理式 $\varphi=\varphi(x_1 \dots x_n)$ が恒真 (universally valid)

とはすべての L-構造 $\mathfrak{A}=\langle A, \dots \rangle$ と

すべての $a_1 \dots a_n \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1 \dots a_n)$ となること

φ が恒真 $\iff$ $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ が恒真 $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$

である.

系　すべての命題論理のトートロジー $\varphi=\varphi(A_1 \dots A_m)$
とすべての L-論理式 $\varphi_1 \dots \varphi_m$ に対して,
$\varphi(\varphi_1 \dots \varphi_m)$ は恒真である. ⊠

述語論理の証明の体系 LK, LK_e

命題論理の LK の"拡張"

LK に等号の公理を加えたもの

命題論理に対する
LK と同様にシーケントを定義して
これに関する証明の体系を作る.

述語論理と命題論理の関係

言語 L を固定しておく.

命題論理の論理式 $\varphi=\varphi(A_1 \dots A_m)$
に対し, $\varphi_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_m), \dots \varphi_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n)$
を L-論理式とするとき すべての L-構造
$\mathfrak{A}=\langle A, \dots \rangle$ と $a_1,\dots,a_n \in A$ に対し,

$\mathfrak{A} \models \varphi(\varphi_1,\dots,\varphi_m)(a_1 \dots a_m)$

$A_1 \dots A_m$ に $\varphi_1 \dots \varphi_m$ を
代入して得られる L-論理式
これが L-論理式になることは
φ に関する帰納法で示せる.

$$\iff v_i = \begin{cases} 1 ; & \mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1 \dots a_n) \text{ のとき} \\ 0 ; & \text{そうでないとき} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m)$$

として,

$$f_{\varphi(A_1 \dots A_m)}(v_1,\dots,v_m)=1$$

証明 φ に関する帰納法 □