述語論理の証明の体系

LK (LK_e) 言語Lを固定しておく

命題論理と同様にシーケント

元の式などを定義する ただしここで

"論理式"と言ってときには、L-論理式

のことと思う $\Gamma \Rightarrow \Delta$: シーケント

初式: $\varphi \Rightarrow \varphi$

推論規則 命題論の推論規則の推論

規則と同じ形のものすべて、＋

論理記号は $\neg, \vee$ のみ

量化子(quantifier)は $\exists$ のみ

$\forall x$ は $\neg\exists x\neg$ の略記と思う

$\forall x \varphi$ "すべての x に対して φ"

$\neg\exists x \neg\varphi$ "$\neg\varphi$ となるような x は存在しない"(反例がない)

$\exists$ に関する推論規則:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

$$\frac{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}{\Rightarrow \exists x\varphi, \neg\varphi}\ (\exists\text{-右})$$

$$(\exists\text{-左})\ \frac{\varphi(y,\cdots), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi(x,\cdots), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(ただし、y は φ の自由変数(またはダミー)で下の段の論理式には自由変数としてあらわれない x は y と異なるものが $\varphi(y,\cdots)$ には自由変数としてあらわれないものとする。

$\forall y \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \forall y \varphi$ は証明できない。

$$(\exists\text{-右})\ \frac{\Gamma, \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi(x)}$$

t はしー項で x 自身であるか または、x は $\varphi(t)$ の自由変数のどれとも異なるものとする。

LKの証明の定義は以上を用いて、命題論理と同様に定義

証明木 …

LKでの証明の例:

$\exists x \neg\exists y \neg\varphi \qquad \neg\exists y \neg\exists x \varphi$

$\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ はLKで証明可能

$$\Rightarrow \varphi, \exists y \neg\varphi$$

$$\frac{\Rightarrow \varphi, \exists y \neg\varphi}{\Rightarrow \exists x\varphi, \exists y \neg\varphi}\ (\exists\text{-右})$$

$$\frac{\Rightarrow \exists x\varphi, \exists y \neg\varphi}{\neg\exists y \neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

$$\frac{\neg\exists y \neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}{\exists x \neg\exists y \neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}\ (\exists\text{-左})$$

$$\frac{\exists x \neg\exists y \neg\varphi \Rightarrow \exists x\varphi}{\exists x \neg\exists y \neg\varphi, \neg\exists x\varphi \Rightarrow}\ (\neg\text{-右})$$

$$\frac{\exists x \neg\exists y \neg\varphi, \neg\exists x\varphi \Rightarrow}{\exists x \neg\exists y \neg\varphi, \exists y \neg\exists x\varphi \Rightarrow}\ (\exists\text{-左})$$

$$\frac{\exists x \neg\exists y \neg\varphi, \exists y \neg\exists x\varphi \Rightarrow}{\exists x \neg\exists y \neg\varphi \Rightarrow \neg\exists y \neg\exists x\varphi}\ (\neg\text{-右})$$

LK_e （LKに等号の公理を加えて得られる体系）

等号の公理 $p_0, \dots, p_{n-1}$ $t_0, \dots, t_{n-1}$ を個のL-項とするとき次の形の公理を導入する。

（f, もしくは任意のn変数の関数記号 $\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ をL論理式とする）

(1) $\Rightarrow p_0 \equiv p_0$

(2) $p_0 \equiv t_0, p_1 \equiv t_1, \dots, p_{n-1} \equiv t_{n-1}$
$\Rightarrow f(p_0, \dots, p_{n-1}) \equiv f(t_0, \dots, t_{n-1})$

(3) $p_0 \equiv t_0, p_1 \equiv t_1, \dots, p_{n-1} \equiv t_{n-1},$
$\varphi(p_0, \dots, p_{n-1}) \Rightarrow \varphi(t_0, \dots, t_{n-1}),$

LK_e の証明とは、証明木の葉に初式または等号の公理がのっているものとして定義しなおす。

LK_e の健全性と完全

（復習：論理式 φ $(\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}))$ は恒真であるとは、すべてのL-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ となることだった。

定理（LK_e の健全性） シーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が LK_e で証明可能なら $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ は恒真である

ただし $\Gamma = \{\varphi\}$ のときは $\bigvee\{\varphi\}$ も $\bigwedge\{\varphi\}$ も φ のこととする。また $\Gamma = \phi$ のときは $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ は $\bigvee\Delta$ とする。

$\forall y \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \forall y \varphi$ は証明できない。（演習）

特に $\Rightarrow \varphi$ が証明可能なら、φ は恒真である。

健全性定理の証明 証明木の高さに関する帰納法で証明する。 ∎

演習 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと $\Rightarrow (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ が証明可能であることは同値。

証明木 …

LK での証明の例：

$\exists x \neg \exists y \neg \varphi$　　$\neg \exists y \neg \exists x \varphi$

$\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ は LK で証明可能

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \varphi, \exists y \neg \varphi}{\Rightarrow \exists x \varphi, \exists y \neg \varphi}\,(\exists\text{-右})}{\neg \exists y \neg \varphi \Rightarrow \exists x \varphi}\,(\neg\text{-右})}{\exists x \neg \exists y \neg \varphi \Rightarrow \exists x \varphi}\,(\exists\text{-左})}{\exists x \neg \exists y \neg \varphi, \neg \exists x \varphi \Rightarrow}\,(\neg\text{-左})}{\exists x \neg \exists y \neg \varphi, \exists y \neg \exists x \varphi \Rightarrow}\,(\exists\text{-左})}{\exists x \neg \exists y \neg \varphi \Rightarrow \neg \exists y \neg \exists x \varphi}\,(\neg\text{-右})}$$

x は自由変数として $\exists x \varphi$ にすり替わる

$\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$ は LK で証明可能

LK_e （LKに等号の公理を加えて得られる体系）

等号の公理 $A_0, \dots, A_{n-1}$ $t_0, \dots, t_{n-1}$ を任意のL-項とし、とき次の形の公理を導入する。

（f, R は任意の n 変数の関数記号、$\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ をL-論理式とする）

(1) $\Rightarrow A_0 = A_0$

(2) $A_0 = t_0,\ A_1 = t_1, \dots, A_{n-1} = t_{n-1}$
$\Rightarrow f(A_0, \dots, A_{n-1}) = f(t_0, \dots, t_{n-1})$

(3) $A_0 = t_0,\ A_1 = t_1, \dots, A_{n-1} = t_{n-1},$
$\varphi(A_0, \dots, A_{n-1}) \Rightarrow \varphi(t_0, \dots, t_{n-1})$

LK_e の証明木、証明木の葉に初式または等号の公理がのっているものとして定義しなおす。

LK_e の健全性と完全

復習：L-論理式 $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ は恒真であるとは、すべてのL-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ と $a_1, \dots, a_n \in A$ に対し $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ となることだった。

定理（LK_e の健全性）シーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が LK_e で証明可能なら $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ は恒真である

ただし $\Gamma = \{\varphi\}$ のときには $\bigvee\{\varphi\}$ も $\bigwedge\{\varphi\}$ も φ のこととする。また $\Gamma = \phi$ のときには、$(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ は $\bigvee\Delta$ とする。

(*) $\forall y \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \forall y \varphi$ は証明できない。

特に $\Rightarrow \varphi$ が証明可能なら、φ は恒真である。

健全性定理の証明 証明木の高さに関する帰納法で証明する。■

演習 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であることと $\Rightarrow (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ が証明可能であることは同値。

(*)の健全性定理からの証明

もし $\forall y \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \forall y \varphi$ の一般的な φ に依存しない証明があったとすると、健全性定理から、$(\forall y \exists x \varphi \to \exists x \forall y \varphi)$ が恒真ならなくてはいけないが（どの φ に対しても）この含意となるような構造とその言語での論理式 φ がかんたんに作る（演習）

定理（完全性定理：Kurt Gödel 1928）
任意のシーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ が恒真なら $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は LK_e で証明可能である。