例 論理式 φ が

$(\neg(A_1 \wedge A_3) \vee (A_3 \to A_1))$

であるとする. このブール代数への解釈：

$\varphi = \varphi(A_1, A_3)$ としたときの f_φ は

以下のような 真偽(値)表 (truth-value table, truth table)

を作ることで求められる.

$$f_\varphi : 2^2 \to 2$$

A_1	A_3	$(A_1 \wedge A_3)$	$\neg(A_1 \wedge A_3)$	$(A_3 \to A_1)$	φ
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

$f_{(A_1 \wedge A_3)}$ $f_{\neg(A_1 \wedge A_3)}$ $f_{(A_3 \to A_1)}$ f_φ

一方 $\varphi = \varphi(A_1, A_2, A_3)$ と考えて f_φ を計算すると,

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \wedge A_3)$	$\neg(A_1 \wedge A_3)$	$A_3 \to A_1$	φ
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

講義ノート：
http://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-pp13.pdf

7.4

補題1（命題論理の論理式のブール解釈の定義の整合性）

$A_0, \dots, A_{m-1}, A_m, \dots, A_{n-1} \in PropVar$

で $\varphi = \varphi(A_0, \dots, A_{m-1})$ のとき

$\varphi = \varphi(A_0, \dots, A_{n-1})$ でもあり

このとき, $t_0, \dots, t_{m-1}, t_m \dots t_{n-1} \in 2$ (すべての) に対して,

$$f_{\varphi(A_0, \dots, A_{m-1})}(t_0, \dots, t_{m-1})$$

$$= f_{\varphi(A_0, \dots, A_n)}(t_0, \dots, t_{m-1}, t_m, \dots, t_{n-1})$$

が成り立つ. 証明 φ の構成に関する帰納法で示す. □

問題　どのブール関数 $f: 2^n \to 2$ が
論理式の解釈として表現できるか?（つまり
$f = f_\varphi$ となる φ が存在するか?）

（後で次を示す:
semantical completeness
命題論理の意味論的完全性:
すべてのブール関数 f に対し $f = f_\varphi$ となる
論理式 φ が存在する）

問題　トートロジーの
全体はどう表現できるか?
⇒ 証明の体系の
完全性

命題論理の論理式 φ, ψ に対し,
$\varphi = \varphi(A_0, \dots, A_{n-1})$, $\psi = \psi(A_0, \dots, A_{n-1})$ とし
（こうなるように $A_0, \dots, A_{n-1}$ をえらぶことはいつでもできる!）

講義ノート:
http://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-pp13.pdf

$f_{\varphi(A_0,\dots,A_{n-1})} = f_{\psi(A_0,\dots,A_{n-1})}$ となるとき,
φ と ψ は 関数的に同値である という.
（機能的に同値）
functionally equivalent

機能
帰納

このことを $\boxed{\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \psi}$ とあらわす.

すべての $i_0, \dots, i_{n-1} \in 2$ に対し,
$f_\varphi(i_0, \dots, i_{n-1}) = 1$ なら, $f_\psi(i_0, \dots, i_{n-1}) = 1$
が成り立つとき φ は 関数的に ψ を 導く
機能的に
ということにする. このことを $\boxed{\varphi \models \psi}$ とあらわす.

この定義は補題1から,
命題変数 $A_0 \dots A_{n-1}$ のえらび
かたに依存せず
整合的である

$f_\varphi(i_0, \dots, i_{n-1}) = 1$ がすべての $i_0, \dots, i_{n-1} \in 2$ に対し成り立つとき
φ はトートロジーであるという

例　$(\neg A \vee A)$ はトートロジーである
$(A \to A)$

A	$\neg A$	$(\neg A \vee A)$	$(A \to A)$
0	1	1	1
1	0	1	1

$f_\varphi(i_0, \dots, i_{n-1}) = 0$ がすべての $i_0, \dots, i_{n-1} \in 2$ に対し
成り立つとき, φ は 矛盾 であるという

例　$(\neg A \wedge A)$ は矛盾である

A	$\neg A$	$\neg A \wedge A$
0	1	0
1	0	0

アイデア:
φ がトートロジー
〜 φ は論理的に正しい

$((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ を
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ と略記する

$\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \psi \Leftrightarrow$
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ がトートロジー
である.

定義がいくつかわかる?

補題2　φ と ψ を命題論理の
論理式とするとき, (1) 次は同値である:
(a) $\varphi \models \psi$
(b) $(\varphi \to \psi)$ はトートロジーである
(2) 次は同値である.
(a) $\varphi \models \psi$ かつ $\psi \models \varphi$
(b) $\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \psi$
(c) $(\varphi \to \psi)$ も $(\psi \to \varphi)$ もトートロジーである
(d) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ がトートロジーである.