補題1 "$\Gamma \Rightarrow \Delta$" が証明可能

$\Gamma = \phi$ $\Delta = \phi$ でもよい

$\Gamma, \Delta, \ldots$ は有限の数が有限の論理式の集合

$\Leftrightarrow \bigwedge\Gamma \Rightarrow \bigvee\Delta$

(つまり $\{\bigwedge\Gamma\} \Rightarrow \{\bigvee\Delta\}$)

は証明可能

ただし、$\Gamma = \{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ のとき

$\bigvee\Gamma$ は $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$

$\bigwedge\Gamma$ は $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ のこととする

ただし、$\Gamma = \phi$ のときには $\{\bigvee\Gamma\}$ $\{\bigwedge\Gamma\}$ は ϕ とする

$\Gamma = \{\varphi\}$ のときは $\bigvee\Gamma = \bigwedge\Gamma = \varphi$ とする.

たとえば "$\Rightarrow \Delta$" が証明可能 $\Leftrightarrow$ "$\Rightarrow \bigwedge\Gamma$" が証明 である

補題2 論理式 φ, ψ について

(1) "$\varphi \Rightarrow \psi$" が証明可能 $\Leftrightarrow$ "$\Rightarrow \underbrace{(\varphi \to \psi)}_{(\neg\varphi \vee \psi)}$" が証明可能

(2) "$\varphi \Rightarrow$" が証明可能

$\Leftrightarrow$ "$\Rightarrow \neg\varphi$" が証明可能

$(\to\psi)$ で ψ,
$(\varphi\to)$ で $\neg\varphi$
をあらわすことにする

系3 "$\Gamma \Rightarrow \Delta$" が証明可能

$\Leftrightarrow$ "$\Rightarrow (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$" が証明可能

補題2 (2): "$\varphi \Rightarrow$" が証明可能で P をその証明とすると,

$$\dfrac{\dfrac{P}{\varphi \Rightarrow}\ (\text{の証明})}{\Rightarrow \neg\varphi}\ \text{ワ右}$$

なので "$\Rightarrow \neg\varphi$" は証明可能である.

逆に $\Rightarrow \neg\varphi$ が証明可能として Q をその証明とすると,

高さが3の証明

$$\dfrac{\dfrac{Q}{\Rightarrow \neg\varphi}\ (3) \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\ \text{ワ右}}{\varphi \Rightarrow}\ \text{cut}\ (1,2)$$

ただから, $\varphi \Rightarrow$ も証明可能である.

他の証明は用省.

Soundness Theorem

定理4 (命題論理の証明体系 LK の健全性 soundness)

すべてのシークエント "$\Gamma \Rightarrow \Delta$" に対し, "$\Gamma \Rightarrow \Delta$" が証明可能なら, $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ はトートロジーである

特に "$\Rightarrow \psi$" が証明可能なら ψ はトートロジーである

(完全性定理はこの逆: ψ がトートロジーなら "$\Rightarrow \psi$" は証明可能)

証明 $n = 1, 2, \ldots$ に関する帰納法で次の $(*)_n$ を示す.

$(*)_n$ P が "$\Gamma \Rightarrow \Delta$" の証明で P の高さが $\leq n$ のとき $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ はトートロジー

$n = 1$ のときには 終式とフォルムが一致しているので $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\varphi \Rightarrow \varphi$ の形だから, $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ は $(\varphi \Rightarrow \varphi)$ となる これはトートロジーだから $(*)_n$ は成り立つ

$(*)_n$ が成り立っているとき $(*)_{n+1}$ を示す.

"$\Gamma \Rightarrow \Delta$" がちょうど $n+1$ の高さの証明を持つとき $\bigwedge\Gamma \Rightarrow \bigvee\Delta$ がトートロジーになることが示せればよい.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vdots\ P \\ \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}$$

P の最後の(いちばん下の)の推論がどの推論規則によるかの場合わけで示す.

最後の推論がカットである場合 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \psi \end{array}\right.\ \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \end{array}\right\}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{cut})$$

高さが $\leq n$ の証明

$\sigma \models (\bigwedge\Gamma_1 \wedge \bigwedge\Gamma_2)$
$\Leftrightarrow$
$\sigma \models \bigwedge\Gamma$

$\sigma \models (\bigvee\Delta_1 \vee \bigvee\Delta_2)$
$\Leftrightarrow \sigma \models \bigvee\Delta$

etc に注意する

帰納法の仮定から、(a) $(\bigwedge\Gamma_1 \to (\bigvee\Delta_1 \vee \varphi))$ も

(b) $((\varphi \wedge \bigwedge\Gamma_2) \to \bigvee\Delta_2)$ もトートロジーである。

すべての付値 v に対して、

$v \models (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ となることを示せばよい。

もし、$v \not\models \bigwedge\Gamma_1$ または $v \not\models \bigwedge\Gamma_2$ なら

$v \not\models \bigwedge\Gamma$ なので $v \models (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$

だからよい。

$v \models \bigwedge\Gamma_1$ かつ $v \models \bigwedge\Gamma_2$ として、

$v \models \varphi$ のときには $v \models \bigwedge\Gamma_2 \wedge \varphi$

だから、(b) により、$v \models \bigvee\Delta_2$ である

したがって $v \models \bigvee\Delta$ となり

$v \models (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ である。

$v \not\models \varphi$ のときには、(a) と $v \models \bigwedge\Gamma_1$ の仮定から、

$v \models \bigvee\Delta_1 \vee \varphi$ となるので $v \models \bigvee\Delta_1$ である

したがって $v \models \bigvee\Delta$ だから $v \models (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ である。

以上すべての付値 v に対し、$v \models (\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ が

示せたので $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ はトートロジーである。

$\mathcal{D}$ の最後の推論が他の場合も同様にして $(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$

がトートロジーとなることが示せる。 ☒.

補題5 論理式の(有限)集合 Γ に対し次は同値である

(a) シーケント "$\Gamma \Rightarrow$" は証明可能である

(b) すべての論理式 φ に対し "$\Gamma \Rightarrow \varphi$" は証明可能である

(c) ある命題記号 A^* に対し、"$\Gamma \Rightarrow (A^* \wedge \neg A^*)$" は証明可能である。

"$\Gamma \Rightarrow$" が証明可能なとき、Γ は(論理的に)

矛盾あるという (Γ is contradictory)

証明 (a) $\Rightarrow$ (b):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\text{weakening})$$

にあります。

(b) $\Rightarrow$ (c) は自明

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$\frac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow (A^* \wedge \neg A^*)}{\Gamma \Rightarrow} \quad \dfrac{(A^* \wedge \neg A^*) \Rightarrow}{\neg(\neg A^* \vee \neg\neg A^*) \Rightarrow}}{\Gamma \Rightarrow}\ (\text{cut})$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^* \Rightarrow \neg A^*}{\neg A^* \Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\vee\text{-右}) \quad \dfrac{\neg\neg A^* \Rightarrow \neg\neg A^*}{\neg\neg A^* \Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\vee\text{-右})}{\Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*), \neg A^*}\ (\neg\text{-右})}{\Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\text{cut})}{\neg(\neg A^* \vee \neg\neg A^*) \Rightarrow}\ \neg\text{-左}$$

定理6（命題論理の完全性定理）

（体系LK）

Completeness Theorem

あらゆるシーケント"$\Gamma \Rightarrow \Delta$"に対し

（$\bigwedge P \to \bigvee P$）がトートロジーなら

"$\Gamma \Rightarrow \Delta$"は証明可能である。（LKで）

特に φ がトートロジーなら $\Rightarrow \varphi$

は証明可能（LKで）

系　あらゆる命題論理の論理式 φ に対し

φ はトートロジー $\Leftrightarrow$ "$\Rightarrow \varphi$"は

LKで証明可能。

このために次の補題を証明する

補題7（完全性の補題）　Γ を有限な論理式の集合として

Γ が充足可能でない $\Rightarrow$ Γ は論理的に矛盾する。

"$\Gamma \Rightarrow$"が証明可能なとき、Γ は（論理的に）

矛盾するという（Γ is contradictory）

証明　(a) $\Rightarrow$ (b)：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\text{weakening})$$

によりよい。

(b) $\Rightarrow$ (c) は自明

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow (A^* \wedge \neg A^*)} \qquad \dfrac{}{(A^* \wedge \neg A^*) \Rightarrow}}{\Gamma \Rightarrow}\ (\text{cut})$$

$\neg(\neg A^* \vee \neg\neg A^*) \Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^* \Rightarrow \neg A^*}{\neg A^* \Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\vee\text{-右}) \qquad \dfrac{\neg\neg A^* \Rightarrow \neg\neg A^*}{\neg\neg A^* \Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\vee\text{-右})}{\Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*), \neg A^*}\ (\neg\text{-右}) \qquad \Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}{\Rightarrow (\neg A^* \vee \neg\neg A^*)}\ (\text{cut})}{\neg(\neg A^* \vee \neg\neg A^*) \Rightarrow}\ \neg\text{-左}$$