「公理的集合論」：
数学が全て展開できる
ゆくびみについて研究

— 数学の基礎づけの研究
— 数学そのもの
— 数学の自動化の研究

独立性命題の研究

ゲーデルの不完全性定理から
公理的集合論の中で、真偽の
決定できない命題がたくさんでてくる。
独立命題

forcing（強制法）という手法を
使って 多くの「数学的な」命題が
独立命題であることが証明できる。
この手法に必要となる集合論の
基礎について講義する。

3月とう 4階
測野グループ
プレゼンテーションこ室

独立命題の例

連続体仮説
(Cantor 1867) 自然数の全体を実数の
全体の中に onto にうめこめない。

どんな $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対しても $f[\mathbb{N}] \subsetneqq \mathbb{R}$ となる

"実数の集合は自然数の集合よりサイズが
大きい" ($|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$)

Cantor $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の間の無限の大きさ
は存在しない？ 連続体仮説 (CH)
Continuum Hypothesis

(1963 P. Cohen) 連続体仮説は通常の
集合論の公理系からは CH の真偽は
決着できない。

"$|\mathbb{R}|$ 個未満の個数の測度ゼロ集合の
和集合はたとえば測度ゼロである"

http://fuchino.ddo.jp/kobe/

独立

$\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{fin}$ ： 自然数の部分集合の
全体を差集合が有限という関係で
わって作られるブール代数 を考える
その自己同形群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{fin})$ を考える ①

Wikipedia： 独立
List of statements independent
from ZFC
Axiom System of Zermelo and Fraenkel
with Axiom of Choice

② "$\mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin})$" は単純群になる
は ZFC から独立。
⋮

素朴公理的集合論 ZFC

(Zermelo-Fraenkel Set Theory with the Axiom of Choice)

基本記号 $\in$, $=$

すべてのオブジェクトは集合だと考える。

$x \in y$ は"(集合)x は(集合)y の要素である"と解釈する。

$x = y$ x と y は等しい。

(外延性公理) すべての x, y に対し
Extensionality

$x = y \iff$ すべての z に対して

$(z \in x \iff z \in y)$

注意

上の公理を $=$ の定義と考えると この定義から

$$\begin{cases} x=y \text{ かつ } y=z \text{ なら } x=z \\ x=y \text{ なら } y=x \\ x=x \end{cases}$$

が導ける

$x \neq y$: $x \in y$ でない の略記

(空集合公理) すべての z に対し
Axiom of Empty set

$z \notin x$ となるような x が存在する

上のような x 外延性定理から一意に決まるので

これを ϕ であらわす。この記号は略記として

導入されていると考える。たとえば

"$\phi \in x$" は"ある y (すべての) で すべての z に対して

$z \notin y$ かつ $y \in x$ となるものがある"という主張の略

と思う。(となるものに対して) (となる)

"$x = \{y, z\}$" は"すべての u に対して $u \in x \iff u = y$ または $u = z$"

"$x \in \{y, z\}$" は"$x = y$ または $x = z$" の略記とみられる。

(対の公理) すべての x, y に対して
Pairing Axiom

z で すべての u に対し $u \in z \iff$

$u = x$ または $u = y$ となるものが存在する

上の z を $\{x, y\}$ とあらわすことにする。

$x = y$ のときは $\{x\}$, $\{y\}$ であらわす。(これを)

ここまでの部分で たとえば次のような集合の

存在が保証されている。

singleton x y

ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\{\phi\}\}$ ……

$\phi \neq \{\phi\}$: $\phi \notin \phi$ だが $\phi \in \{\phi\}$ により ϕ と $\{\phi\}$ は異なる

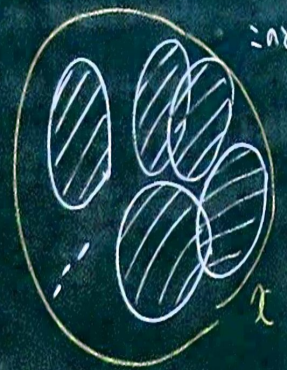
(和集合の公理) すべての $\mathcal{X}$ に対し y

Axiom of Union

で、すべての z に対して

$z \in y \iff$ ある $u \in \mathcal{X}$ に対して $z \in u$

となるようなものが存在する



このとき、

$y = \bigcup \mathcal{X}$

y は集合族 $\mathcal{X}$ の和集合

Union of $\mathcal{X}$

$y = \{z \mid$ ある $u \in \mathcal{X}$ に対して $z \in u\}$

などと書く。

補題 x, y, z に対し u で

$v \in u \iff v = x$ または $v = y$ または $v = z$

となるものが存在する

証明 $u = \bigcup\{\{x, y\}, \{z\}\}$ とおくとこれが求めるもの。 ☒

同様 ある具体的な数 n に対して

"すべての $x_1, x_2 \cdots x_n$ に対して u で

$v \in u \iff v = x_1$ または $v = x_2$ または … または $v = x_n$

となるようなものが存在する" が示せる。

(分離公理) a が (0) 変数または他変

Separation Axiom

$\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ に対して、

変数(引数)

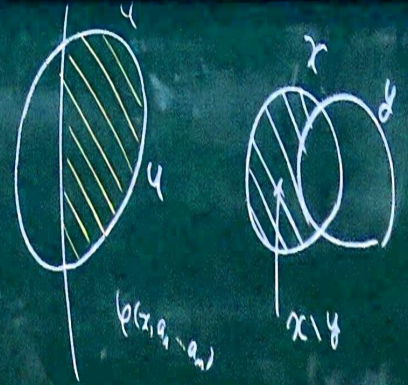
すべての(集合) $a, a_1, \cdots, a_m$ に対し、u で

すべての v に対し $v \in u \iff$

$v \in a$ かつ $\varphi(v, a_1, \cdots, a_m)$ となる

となるようなものが存在する。記号：

$u = \{x \in a \mid \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)\}$



和集合公理と対の公理から x, y に対して

$x \cup y = \bigcup\{x, y\}$ が存在する

分離公理から x, y に対し

$x \setminus y = \{u \in x \mid u \notin y\}$ が存在する。

和集合の公理と分離公理から すべての x に対して

$$\bigcap x = \{u \in \bigcup x \mid \text{すべての } v \in x \text{ に対して } u \in v\}$$

が存在する。

あるいは $x \neq \phi$ に対して $a \in x$ をひとつとって

分離公理から

$$\bigcap x = \{u \in a \mid \text{すべての } v \in x \text{ に対して } u \in v\}$$

が存在する。

対の公理と上から x と y に対して

$$x \cap y = \bigcap \{x, y\}$$

Axiom of Infinity

(無限公理) 集合 x で $\phi \in x$ かつすべての $u \in x$ に対し、$u \cup \{u\} \in x$ となるものが存在する。

x を上のような集合とおくと、

$0 = \phi \in x$

$1 = \{\phi\} = \phi \cup \{\phi\} \in x$

$\{\phi, \{\phi\}\} = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} \in x$

$\{\phi, \{\phi\}\} \cup \{\{\phi, \{\phi\}\}\} \in x$

$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

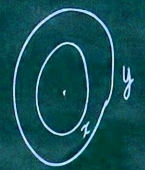
$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \cup \{\{\quad\}\} \in x$

$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$

2

3

4



x を無限公理が存在を保証するような集合(のひとつ)として、

$$W = \{u \in x \mid \text{すべての } z \text{ に対し } z \text{ が } \boxed{} \text{ を満たすなら } u \in z\}$$

とする。W は無限公理を満たす集合のうち"最小"のものになっている。

部分集合に関して

この W を自然 $0, 1, 2 \cdots$ の全体からなる集合と考える。

x, y に対し、すべての $u \in x$ が $u \in y$ となるとき、x は y の部分集合(subset)であるといい、これを $x \subseteq y$ であらわす。

外延の公理から、$x \subseteq y$ かつ $y \subseteq x$ なら $x = y$

$x \subseteq y$ かつ $x \neq y$ なら $x \subsetneq y$

(べき集合の公理) すべての x に対し u で

Axiom of Power すべての v に対し

$$v \in u \Leftrightarrow v \subseteq x$$

となるようなものが存在する

記法: $u = \mathcal{P}(x)$