復習　外延性公理,

空集合公理,

対の公理,

和集合公理

分離公理 ← 各"確定的な集合に関する命題"に対しての公理

無限公理 ⓐ

x で $\phi \in x$ ⓑ $y \in x$ なら $y \cup \{y\} \in x$

となるものが存在する.

$(\mathbb{N} =)\ \omega = \bigcap \{x \mid x$ は ① ② を満たす集合$\}$

自然数の全体

ϕ $\{\phi\}$ $\{\phi, \{\phi\}\}$ …… と考える.

$\phi = 0$, $\{\phi\} = 1$, $\{\phi, \{\phi\}\} = 2$

べき集合の公理

以上で導入した公理 Zermelo が 1908 に導入した

Ernst Zermelo (1871〜1953)

公理系に対応する.

ただし Zermelo の原論文では無限公理は

① $\phi \in x$ ② $y \in x \to \{y\} \in x$ で与えられている

$\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}$ ……

そこで これまでに導入した公理すべてが成り立つ

公理系を Zermelo の公理系とよび Z であらわす.

Z の中で大半の数学は展開できる.

Cartesian product (デカルト積)

補題 (Z) x, y に対し そこで

すべての u に対し $u \in z \iff$ ある $v \in x$ $w \in y$ に対し $u = \langle v, w \rangle$ と表すものがある.

$z = \{\langle v, w \rangle \mid v \in x,\ w \in y\}$

⊛ 順序対 (ordered pair)

x, y に対し, $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ を x と y の順序対とよび $\langle x, y \rangle$ と書く

補題 すべての x, y, x', y' に対し

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x'$ かつ $y = y'$

証明 ← は明か (外延性定理)

⇒ 場合 1 $x = y$ のとき このときには

$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}\}$ となる

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ なら $\langle x', y' \rangle$ は singleton である. ⊛

したがって $\{x\} = \{x', y'\}$ したがって $x' = y'$ で $\langle x', y' \rangle = \{\{x'\}\}$

よって $\{\{x\}\} = \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle = \{\{x'\}\}$ により $x = x'$

また $y = x = x' = y'$

(ア) ⇒ 場合2 $x \neq y$ のとき、このときには

$\{x\} \neq \{x, y\}$ となる $\langle x, y\rangle \equiv \langle x', y'\rangle$

から、$\{x'\} \neq \{x', y'\}$ だから、$x' \neq y'$ である。

特に $\{x', y'\}$ は singleton でない よって

$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ により $\{x\} = \{x'\}$ かつ

$\{x, y\} = \{x', y'\}$ だから $x = x'$ かつ

$y = y'$ となる。 ☒

補題の証明 $v \in X$ なら $\{v\} \subseteq X$ だから、

$\{v\} \in \mathcal{P}(X)$ $v \in X$ $w \in Y$ なら $\{v, w\} \subseteq X \cup Y$

したがって $\{v, w\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$

したがって $\{v\}, \{v, w\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ つまり

$\{\{v\}, \{v, w\}\} \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$ よって

$\{\{v\}, \{v, w\}\} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y)$

$\parallel$

$\langle v, w\rangle$

$Z = \{u \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y) \mid$ ある $v \in X$ $w \in Y$ に対し $u = \langle v, w\rangle\}$

となり 分離公理から、Z は存在する。 ☒

補題でのような Z を X と Y の デカルト積 集合 とよび $X \times Y$

であらわす。 (X と Y の直積集合)

関数 X, Y に対し $X \times Y$ の部分集合で次を

満たすもの f を X から Y への 関数 (写像) とよぶ。

function mapping

$f : X \to Y$ とあらわす：

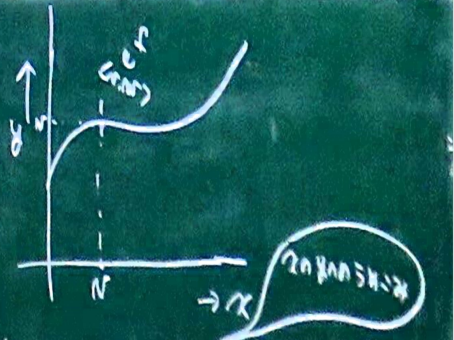
⊛ すべての $v \in X$ に対し、$\langle v, w\rangle \in f$ となる

$w \in Y$ がちょうど1つ存在する。

$v \in X$ に対して ⊛ でのような1意にきまる w を $f(v)$ と

書く。

$X^Y = \{f \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid f$ は ⊛ をみたす$\}$



例 $X \subseteq Y$ のとき $id_X : X \to Y$ を

$id_X = \{u \in X \times Y \mid$ ある $v \in X$ に対し $u = \langle v, v\rangle\}$

として定義できる。