形式意味論での ZFC の定式化

- formal logic

一階の述語論理

集合論"外"で考える

metamathematics
meta logic

記号：

- 変数記号：$x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, y_1, \dots$ など
- 関数記号 $f_1, f_2, \dots$ 各関数記号 f には f の変数の数(arity)が定まっているものとする
  0変数の関数記号を考える(定数とみなす)
- 関係記号：$R_1, R_2, \dots, S_1, S_2, \dots$
  これらについても各関係記号に対して変数の数が定まっているものとする
- $\equiv$ (等号)，'(' ')' カッコ，',' コンマ
- 論理演算子 '$\wedge$' and '$\vee$' or '$\neg$' not '$\rightarrow$' then
- 量化子 '$\exists$' exists '$\forall$' for all

$\mathcal{L}$ が言語とは $\mathcal{L}$ は有限 の関数記号と関係記号の有限集合のことをいう。

言語 $\mathcal{L}$ があたえられたとき，記号列 t が $\mathcal{L}$-項 ($\mathcal{L}$-term) であるということを次のように再帰的に定義する：

(1) 変数記号は(長さ1の記号列として) $\mathcal{L}$-項である。

(2) f が $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号で $t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項のとき，$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-項である

記号列

(3) f が 0変数の関数記号のときには f は $\mathcal{L}$-項である

$\mathcal{L}$ の関数記号　記号列

(4) 以上のみ　($\mathcal{L}$-formula)

記号列 φ が $\mathcal{L}$-論理式であるということを次のように再帰的に定義する。

(1) t_1, t_2 が $\mathcal{L}$-項のとき

$t_1 \equiv t_2$ は $\mathcal{L}$-論理式である。

(2) R が $\mathcal{L}$ の n 変数関係記号で，$t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項のとき，

$R(t_1, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-論理式である

atomic formula

(3) φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式のとき，

$\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ $(\varphi \rightarrow \psi)$

は $\mathcal{L}$-論理式

(4) φ が $\mathcal{L}$-論理式で x が変数記号のとき

$\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ は $\mathcal{L}$-論理式 (5) 以上のみ。

与えられた言語 $\mathcal{L}$ において $\mathcal{L}$ 論理式に関する証明の概念を導入する:

論理公理とよばれる $\mathcal{L}$-論理式の集まりを Logical axioms 定義する. たとえば

トートロジー: 命題論理で恒真な命題 たとえば $(A \vee \neg A)$ などの命題変数に $\mathcal{L}$ 論理式を代入して得られる論理式全部. (たとえば φ を一つの $\mathcal{L}$ 論理式として $(\varphi \vee \neg\varphi)$)

1階述語の公理 $x \equiv x$

$$\left((x_1 \equiv y_1 \wedge \cdots \wedge x_m \equiv y_m) \to (\alpha(x_1, \ldots, x_m) \to \alpha(y_1, \ldots, y_m))\right)$$

言語 $\mathcal{L}$ の m 変数関係記号

など, ...

推論規則

三段論法 $\dfrac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$

存在推論 $\dfrac{(\varphi \to \psi)}{(\exists x \varphi \to \psi)}$

ただし x は ψ の中には変数としてあらわれないものとする.

この体系を K とよぶことにして Das Aussagenkalkül (命題計算 (独))

T を $\mathcal{L}$-式の集まりとするとき, T から $\mathcal{L}$ 論理式 φ が K で証明できるあるいは論理式の列 P は K での φ の T からの証明である:

$$T \vdash_K \varphi \qquad T \vdash_K^P \varphi$$

を以下のように定義する: $T \vdash_K^P \varphi$

P が K での φ の T からの証明であるとは, P は $\mathcal{L}$-論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ で $\varphi_n = \varphi$, P の各 φ_i は論理公理の1つであるか T の要素であるかあるいは $i_1, i_2, \ldots, i_k$ に対して

$\dfrac{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}}{\varphi_i}$ が推論規則の1つであるか $\dfrac{\varphi_{i_0}}{\varphi_i}$ が

推論規則のうちの1つであるかのどちらかが成り立っている.

ある P に対し, $T \vdash_K^P \varphi$ のとき $T \vdash_K \varphi$ と書く.

$\mathcal{L}$-論理式 φ はそこにあらわれる変数記号 x すべて $\exists x \psi$ または $\forall x \psi$ という形の $\mathcal{L}$-論理式で ψ の部分式となっているものの中に表われるとき $\mathcal{L}$-文であるという.

集合論の言語

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$$

↑2変数の関係記号

x が ψ にあらわれる変数記号で $\exists x \psi$, $\forall x \psi$ のカッコの中で束縛されていないとき x は ψ の自由変数であるという.

$x_1, \ldots, x_n$ が ψ の自由変数ですべて $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ と書く

(外延性公理)

$$\forall x \forall y \left(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\right)$$

(空集合公理) $\exists x \forall y (y \notin x)$

⋮

$$\left((z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \rightarrow z \in x)\right)$$

は $x \notin y$ と $\neg y \in x$ の略記

(分離公理) $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$

すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し、

$$\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)))$$

⋮

置換公理 $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall u \left(\forall x (x \in u \rightarrow \exists! y\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow \exists z (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)))\right)$$

$\exists! y\, \psi$

ψ の y を z で置換

$$\leftrightarrow \exists y \psi \wedge \left(\forall y' \forall y'' (\psi(y/y') \wedge \psi(y/y'') \rightarrow y' = y'')\right)$$