http://fuchino.ddo.jp/kobe/financing-LN-2015.pdf

ZFC の "クラス" の扱い

$\{x \mid \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1})\}$ が集合でない

ときに、この集合の"カタチ"という

話しがある!!

この集合のカタチを言うこと、論理式によく話しを:

$\varphi = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とする.

$\psi = \psi(x_0, \dots, x_{n-1})$

このとき、$\mathrm{ZFC}, \psi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \vdash^K \varphi(u, a_0, \dots, a_{n-1})$

(これは $\mathrm{ZFC}, \psi(u, a_0, \dots, a_{n-1}) \vdash^K \varphi(u, a_0, \dots, a_{n-1})$

と同値.)

となるような u が $a_0, \dots, a_{n-1}$ に対して、

クラス X を

$X = \{x : \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1})\}$

と定義すると $u \in X$ である"

と表現することにする.

仮定 $\mathcal{G}$ をすべての $\mathcal{L}_\in$-論理式の全体とする.

同様に、$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\psi(x, x_0, \dots, x_{n-1})$ に対して

$\mathrm{ZFC}, \psi \vdash^K \exists z \forall x \left(x \in z \leftrightarrow \varphi(x, x_0, \dots, x_{n-1})\right)$

となるとき

"$\psi(u, a_0, \dots, a_{n-1})$ となるような $u, a_0, \dots, a_{n-1}$ に対し

$X = \{z : \varphi(z, a_0, \dots, a_{n-1})\}$ として

$u = X$ である"

$\forall x \in X \quad \forall x \in Y \quad \dots$

すべての集合 a は、$\{x : x \in a\}$

として クラスと考える.

クラスが集合でないとき、X は真のクラスで

あるという (proper class)

定理 (Russell) $u = \{x : x \notin x\}$ となる

集合は存在しない. つまり $\{x : x \notin x\}$ は真のクラスである.

証明 もし $u = \{x : x \notin x\}$ となる u があったとして、↗

この u に対し、$u \in u$ とすると、u の定義から $u \notin u$ となり矛盾

一方 $u \notin u$ とすると u の定義から $u \in u$
となり矛盾. (正確に?
$u=\{x : x \notin x\}$ となる u は存在しない. □

$V=\{x : x=x\}$ とおく. このとき

定理 (ZC) $u=V$ となる集合 u は
存在しない. つまり V は真のクラスである.

証明 もし $u=V$ となる u が存在するとおくと,

$$\{x : x \notin x\} = \{x \in u : x \notin x\}$$

となる前分離公理より, $\{x : x \notin x\}$ が集合となって
しまい矛盾. □

系3. (ZC) 任意(集合) x に対し, $y \notin x$
となる y が存在する

証明 定理2より $x \notin V$ なので $y \in V$ で $y \notin x$
となるものが存在する.

有限列のZFCでの扱い

$\langle a,b \rangle$ を a と b がある決まった順序で並んでいるものと見ることができ
$\langle a_0, \langle a_1, a_2 \rangle \rangle$ を a_0, a_1, a_2 がある決まった順序で並んでいるものと見ることが
できる ...

このやり方では, 文字通り "X の要素の有限列のなかで" を集合として
とらえることができなくなってしまう!

集合 X において
ここで
有限列とは ω の要素 n の上の関数と考えることにする.
$n=\{0, \dots, n-1\}$ と集合論では考えるので, $f : n \to X$ のとき f を
$f(0)\, f(1) \cdots f(n-1)$ を並べた有限列と解釈する.

$\omega^{>}X = \{f : \text{ある } n \in \omega \text{ に対し}, f : n \to X\}$

は X の要素を(重複を込めて)おいた有限列の
全体の集合と考えることができる.

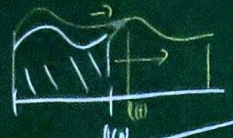
$\omega^{>}X \subseteq \mathcal{P}(\omega \times X)$ なので, $\omega^{>}X$ は集合である.

$s \in \omega^{>}X$ のとき $s : n \to X$ となる $n \in \omega$ が
存在するがこの n を $l(s)$ とおく.
(s の長さ とよぶ)
length

$s,t \in {}^{\omega}X$ のとき

$s^\frown t$ を $u : \ell(s)+\ell(t) \to X$ で次を満たすものとする

$$u(k) = \begin{cases} s(k) & k < \ell(s) \\ t(k') & \ell(s) \le k < \ell(s)+\ell(t) \text{ で } k = \ell(s)+k' \text{ と } k' < \ell(t) \text{ とおけるとき} \end{cases}$$



ここで $\langle a,b\rangle$ と

$\{\langle 0,a\rangle, \langle 1,b\rangle\} : 2 \to \{a,b\}$

が同一視できる.

$\langle a\langle b,c\rangle\rangle$ と

$\{\langle 0,a\rangle \langle 1,b\rangle \langle 2,c\rangle\} : 3 \to \{a,b,c\}$

が同一視できる etc.

このとき下記の:

$V_n = \{\langle 0,0,n\rangle : n \in \omega\}$

$Fnsym^k = \{\langle 1,k,m\rangle : m \in \omega\}$ $k \in \omega$

$Relsym^k = \{\langle 2,k,m\rangle : m \in \omega\}$ $k \in \omega \setminus 1$ $(1 = \{\phi\})$

$\{\langle 3,0,1\rangle \ \langle 3,0,2\rangle \ \langle 3,0,3\rangle \ \langle 3,0,4\rangle$

$\langle 3,0,5\rangle, \langle 3,0,6\rangle, \langle 3,0,7\rangle \ \langle 3,0,8\rangle, \langle 3,0,9\rangle \ \langle 3,0,10\rangle\}$

$\wedge \ \vee \ \neg \ \to \ \exists \ \forall$

$$Sym = Var \cup \bigcup_{k\in\omega} Fnsym^k \cup \bigcup_{k\in\omega} Relsym^k$$

$$\cup \{\langle 3,0,1\rangle \cdots \langle 3,0,10\rangle\}$$

とする.

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^{\omega}$ に対し,

"$D \in {}^{\omega}Sym$ が $\mathcal{L}$-項である"

"$D \in {}^{\omega}Sym$ が $\mathcal{L}$-論理式である"

"$P \in {}^{\omega}({}^{\omega}Sym)$ が $\mathcal{L}$ の下記の5つの述語である

で定義できる.

これを meta mathematics で同様に定義できる.

Lemma ω上の2項演算

$+ : \omega^2 \to \omega$ で

① すべての $m \in \omega$ に対し
$m + 0 = m$

② すべての $m, n \in \omega$
$m + S(n) = S(m+n)$

$+(m,n)$ を
$m+n$ と書くことにする

となるようなものが1意に存在する.

$m + (n+1)$
$= (m+n)+1$

定義 スケール

一般に ω 上の2項演算 $+$ は次のように定義される:

$+_k : \omega$ 上の k 変数関数 で

① すべての $m \in \omega$ に対し
$m +_k 0 = m$

② すべての $n \in \omega$ $n < k$ で $+_k(n) < k$ となる
$m +_k S(n) = S(m +_k n)$

1意に存在する 本に関する帰納法で示す.

このとき $+ = \bigcup_{k \in \omega} +_k$ とすれば これが求めるものと
1致 を $+_k$ の 1意性 を 利用 する.

この部分を
次のように
(証明)

Lemma

すべての $m, n \in \omega$ に対し
$m + n = n + m$

Lemma

すべての $m, n \in \omega$ に対し
$k < m+n$ $m \le k$ なら $l < m$ で $k = m + l$
となるものが1意に存在する

証明 n に関する帰納法を使って示す.

⋮

$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$

$\mathcal{L}_{\{\}} = \{\in, \phi, \{\cdot;\cdot\}_1, \cup(\cdot)_1, \cap(\cdot)_1, \cdot\setminus\cdot\}_2$

2変数関係記号 / 定数記号 / 2変数関数記号 / 1変数関数記号 / 1変数関数記号 / 2変数関数記号

$ZFC_{\{\}}$: ZFC

+ $\forall x_A \forall y_A \exists z_A \forall u_A \left(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y) \right)$

+ $\forall x_A \exists y_A \forall z_A \left(z \in y \leftrightarrow \forall u_A (u \in x \to u \in z) \right)$

+ $\forall x_A \forall y_A \exists z_A \forall u_A \left(u \in z \leftrightarrow u \in x \cap y \right)$

+ $\forall x_A \exists y_A \forall z_A \left(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x \right)$

+ $\forall x_A \forall y_A \exists z_A \forall u_A \left(u \in z \leftrightarrow u \in x \setminus y \right)$

+ $\forall x_A \left(\phi \notin x \right)$

http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

このとき $ZFC_{\{\}}$ は ZFC の保存拡大 (conservative extension)

となる つまり, すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ について $ZFC \vdash_K \varphi \iff ZFC_{\{\}} \vdash_K \varphi$

$\Rightarrow$ は明か

が成り立つ.

このとき, 数 0, 1, 2, 3, ... に対応する $\mathcal{L}_{\{\}}$-項で 自由変数を含まない"ものが作れる:

$\mathcal{L}_{\{\}}$-Closed term 閉項

ϕ $\{\phi\} (= \{\phi, \phi\})$ $\{\phi, \{\phi\}\}$ $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ ...

変数記号, 関数記号 etc を前回のような集合として ($ZFC_{\{\}}$ で) 導入すると,

具体的にとられた言語 $\mathcal{L}$ (つまり, meta logic で対応するものが考えられるような $\mathcal{L}$) に対して, 次が言える. $Term_{\mathcal{L}}$, $Fml_{\mathcal{L}}$ で ZFC の中の $\mathcal{L}$-項の全体, $\mathcal{L}$-論理式の全体をおのおの meta logic で $\mathcal{L}$-項, $\mathcal{L}$-論理式 φ に対して, $\mathcal{L}_{\{\}}$-閉項 $\ulcorner t \urcorner$, $\ulcorner \varphi \urcorner$ がとれて,

$ZFC \vdash_K \ulcorner t \urcorner \in Term_{\mathcal{L}}$, $\ulcorner \varphi \urcorner \in Fml_{\mathcal{L}}$

以下 $\mathrm{ZFC}_{(\mathrm{fc})}$ の中で次のおおまかにやる。

$\mathcal{L}$ を任意の言語とするとき、$\mathcal{L}$ 代数の構造とは、$\mathcal{L}$ は次の形の組のことである。

$$\mathcal{A}=\langle A, f^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}\rangle_{f\in F_{\mathcal{L}},\, r\in Rel_{\mathcal{L}}}$$

ここに
① $F_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の関数記号の全体
$Rel_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の関係記号の全体

② $A\neq\phi$ ← $\mathcal{A}$ の台集合 (underlying set)

③ $f\in F_{\mathcal{L}}$ が n 変数関数記号のとき、$f^{\mathcal{A}}: A^n \longrightarrow A$
($n=0$ のときは $f^{\mathcal{A}}\in A$ つまり $f^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ を $f^{\mathcal{A}}$ と同一視する)

④ $r\in Rel_{\mathcal{L}}$ が n 変数関係記号のとき、$r^{\mathcal{A}}\subseteq A^n$
($n\neq 0$)

$A^{\phi}=\{f: f:\phi\to A\}=\{\phi\}$

t を $\mathcal{L}$-項で t において現れる自由変数が $x_0,\dots,x_{n-1}$ のうちに含まれる(これを $t=t(x_0,\dots,x_{n-1})$ と書く)とき、$a_0,\dots,a_{n-1}\in A$ に対し、(t の構成に関して)
$t^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})\in A$ を次のように再帰的に定義する:

t が x_k ($k<n$) のときには
$t^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})=a_k$ とする。

t が 0 変数関数記号 f (定数記号) のときには
$t^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})=f^{\mathcal{A}}$

$t_0\cdots t_{k-1}$ に対して あらかじめ $t_0^{\mathcal{A}},\dots,t_{k-1}^{\mathcal{A}}$ が定まっているとして、
$t^{\mathcal{A}}$ が k 変数関数記号 f により $f(t_0,\dots,t_{k-1})$ とおかれているとき、
$t^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})=f^{\mathcal{A}}\left(t_0^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}),\dots,t_{k-1}^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})\right)$ とする。

φ を $\mathcal{L}$-論理式で φ において現れる自由変数が $x_0,\dots,x_{n-1}$ に含まれるとき ($\varphi=\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})$ とおく) $a_0,\dots,a_{n-1}\in A$ として
$\mathcal{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$

のとき、変数 $x_0,\dots,x_{n-1}$ を $a_0,\dots,a_{n-1}$ と解釈したとき $\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$ が成立つ。($\mathcal{A}$ models $\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$ / $\mathcal{A}$ satisfies $\varphi(\dots)$)

ということを φ の構成に関する再帰法により定義する。

φ が $t_0\equiv t_1$ (記号) の形をしているとき、このとき、
$\mathcal{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})\Leftrightarrow t_0^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})=t_1^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})$
(集合論のドアの同等性)

以下を k 変数の関係記号 $t_0,\dots,t_{k-1}$ を項として
φ が $r(t_0,\dots,t_{k-1})$ のとき、

(3) このときは

$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \langle t_0^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}), \dots, t_{k-1}^{\mathcal{A}}(a_0, \dots) \rangle \in R^{\mathcal{A}}$

とする

φ が $(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ のときには

$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi_0(a_0, \dots a_{n-1})$ かつ
(または / なら)
$\mathcal{A} \vDash \varphi_1(a_0, \dots a_{n-1})$

と定義する.

φ が $\neg\psi$ のとは

$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \mathcal{A} \not\vDash \psi(a_0, \dots a_{n-1})$

と定義する.

φ が $\exists x \psi$ のとき,
$\forall x \psi$

このときは $\psi = \psi(x, x_0, \dots, x_{n-1})$ となるが,
↑ x が $x_0, \dots x_{n-1}$ の中に入っても ときには x を $x_0, \dots x_{n-1}$ のリスト からはずす

$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots a_{n-1}) \iff$ ある $a \in A$ に対し (すべての)
$\mathcal{A} \vDash \psi(a, a_0, \dots a_{n-1})$ 成り立つ

meta logic で定義した証明の概念を集合論の中で同様に定義できる. 特に "P はすべての T からの ψ の証明である" という Δ_0-論理式が作る

K の完全性定理 (Zで証明可能)

T を文の集合 (公理系) とし φ を L-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \dots x_{n-1})$ とするとき,

すべての L-構造 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{A} \vDash T$ なるすべての $a_0, \dots a_{n-1} \in A$ に対し $\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ なら $T \vdash_K \varphi$ (ie. $\exists P$ (P は φ の T からの証明))

注意 $\mathcal{A} \vDash \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ の定義は変数の列のうち 自由変数として本当に φ の中に現れる x_k に対する a_k の代入のみに依存する (変)

T を文の集合とするとき

$\mathcal{A} \vDash T \iff$ すべての $\varphi \in T$ に対し $\mathcal{A} \vDash \varphi$

$\mathcal{A}$ は T のモデル