

補題1

(1) $\langle X, R \rangle$ は 順序集合 今とし
w.o.p.

$\rightarrow X$ とは?

$\langle X, R \cup \{\langle x, y \rangle | x \in X\} \rangle \xrightarrow{R}$
は 順序集合.

(2) $\langle X, R \rangle$ が w.o.p. とき $Y \subseteq X$

$\langle Y, R \cap Y^2 \rangle$ は w.o.p.

(3) $\langle I, \leq \rangle$ が 順序集合 とき、

$\forall i \in I$ に対して $\langle X_i, R_i \rangle$ w.o.p. とき

もし X_i は X_j の子集合で $R_i = R_j \cap X_i$?
 \rightarrow とき、 $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ となる、

$\langle X, R \rangle$ は w.o.p.

証明 (1) (i) は 明らか。

(ii) $\langle X, R \rangle$ は 全順序 $x, y, z \in X \quad x \in X, y \in X$
 $z \in X$ とき、 $I \in I$ を $i, j, k \in I$ の最大のものとすると
 $x, y, z \in X_I$ とき、 $x R_I y \wedge y R_I z$ とき、

$x R_I y \wedge y R_I z$ とき、 R_I が順序であるとき、

$x R_I y \wedge y R_I z$ とき、 R_I が順序であるとき、

$x R_I y \wedge y R_I z$ とき、 同様に R_I が

順序順序であるとき、 $A \subseteq X$ とき、

ある $i \in I$ とき $A \cap X_i \neq \emptyset$ となるが、
このとき R_i の 順序性から $A \cap X_i$ は R_i の A の最小元 a を
持つ (※ $a = b$), a は $X \cap A$ の最小元である。

（Ⅳ） 順序を用いる定理はすべて、 ZF-AF
(AF : 基本公理)

（の定理の一部）をのべて 実は ZF-AF が 実行せず。
以下でモードを上げてこの ZFC の Subsystem の中で定理が成る。

X が 传递的 (transitive) とき すなはち 任意の $x \in X$ と $y \in x$ に対して
 $y \in X$ となる。つまり 任意の $x \in X$ に対して、 $x \subseteq X$ とき $x = c$

X が 「順序数」 あるいは、

X が transitive \in は X 上の順序順序。
順序順序とは \in (?) とき、

$R = \{(x, y) \in X^2 \mid x \in y\}$ とき

$\langle X, R \rangle$ が w.o.p. ならば、

AF のとき X が順序数 $\leftrightarrow X$ は
transitive \in は X 上の順序順序。

On が順序の全体の集合を有する。On の範囲
補題2 (1) $\phi \in On$

(1) $\phi \in On$ とき $\phi \neq \emptyset$ とき、

(2) $\phi \in On$ とき、 $\phi \cup \{\phi\} \in On$

(3) $d \in O_n$ かつ $\beta \in d$ なら $\beta \in O_n$

もしも $d \in O_n$ なら $d = \{\beta \in O_n : \beta \in d\}$

$$= \{\beta \in d : \beta \in O_n\} \text{ となる}.$$

(4) $d \in O_n$ かつ $A \subseteq d$ かつ $\alpha \in A$ なら

もしも $\beta \in O_n$ なら $A = \beta$ である.

(5) $d \in O_n$ かつ $\beta_1, \beta_2 \in d$ かつ $\beta_1 \neq \beta_2$ なら

直前の事実より $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ となる.

(6) もしも $d \in O_n$ かつ $\{d\} \subseteq d$ なら $d \in O_n$ である

を示すことを示すが、 $d \in O_n$ と矛盾する.

(7): 略.

(2): $d \in O_n$ が既約ならこれは補題 1(4) によって

(6) $w \subseteq O_n, w \in O_n$ | ~~(5) $x \in O_n$ かつ $x \in d$ なら $x \in O_n$~~
 ~~$UX \in O_n$ かつ $X \subseteq d$ なら $UX \in O_n$~~

\in は $d \cup \{d\}$ 上の W.O. だから、(1).

(3): $d \in O_n$ かつ $\beta \in d$ なら $\beta \subseteq d$ と (8). $\beta \subseteq d$ と (8).

β は既約である: $\beta \in \beta$ $m \in \beta$ なら $m \in \beta$
 d 上の全順序であるから $m \in \beta$ となる. β は m で m が m の下に m である.

補題 1 (2) より \in は β 上の W.O. となる.

(7), (8), $\beta \in O_n$.

(4): $A \subseteq d$ かつ $\alpha \in A$ が既約なら $A \neq \alpha$ なら $w.o.$ とする
を示すことを示すが、 $A = I_\epsilon(\beta)$ と β は $\beta \in d$ である. (3)

もしも $I_\epsilon^d(\beta) = \{m \in d \mid m \in \beta\} = \{m \mid m \in \beta\} = \beta$ と β は $\beta \in O_n$ である.

つまり $w = UW$ 上の W.O. が既約である. (1) より

(5): d, β, β_0 をこのようにすると:

$\beta_0 \in \beta$ で β のすべての要素は β_0 が

$$\begin{aligned} I_\epsilon^\beta(\beta_0) \text{ の要素たまに}, \beta &= I_\epsilon^\beta(\beta_0) \cup \{\beta_0\} \\ &= \beta_0 \cup \{\beta_0\} \end{aligned}$$

$d \in O_n$ かつ $d \cup \{d\} \subseteq d+1$ となる.

(6): $w \subseteq O_n$ は $d+1$ で元して (まだ未証明)

$m, m \in w$ に対して $|m| \leq m = m = m = m$

が既約であることを示せよ. $m \in m$ かつ $m \in m$

が既約であるのだが、このことを補題 1(3) が \in は

$w = UW$ 上の W.O. が既約である. (1)

$w \in O_n$. //

定理 3 (4) $d, \beta \in O_n$ たり

$d \in \beta$ または $d = \beta$ または $\beta \in d$ のいずれかが成り立つ.

(2) O_n は既約的で \in は O_n 上の全順序

整列順序 (ラス) である.

証明 (1): 補題 2, (4) より, \in は β の既約性ならば

β は β の始端となるかのどちらかが成り立つことを示せばよ

$A = d \cap \beta$ となる $A \neq d$ のとき $\beta \cap d$ である.

[$\beta \cap d \neq \emptyset$ となる $\beta \subseteq d$ は $\beta \subseteq d$ かつ $m \in \beta \cap d$]

もしも $A \neq d$ かつ $A \neq \beta$, $d \in d, \beta \in \beta$ $A = I_\epsilon^d(d) \cap I_\epsilon^\beta(\beta)$

$$\textcircled{d} \Rightarrow A = I_{\epsilon}^{\beta}(\beta') = \beta'$$

$$\alpha' = \beta' \in d \cap \beta \text{ となるが } \alpha' \notin A$$

∴ $\exists \gamma$ が
C

$$(2) : \alpha \in O_n, \beta \in \alpha \text{ とする補題 } 2, (3) \text{ に依る},$$

$\{ \subset O_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ は O_n は ω -稠密的

$\in I \subset O_n$ の ω -稠密と ω -稠密的

$$\alpha \in \beta \subset Y \Rightarrow \alpha \in Y$$

$\in Y$

$\alpha \notin d$ 補題 2, (1)

(1)の従事者 $\in I$ は O_n 上の線形写像順序

$\in I \subset O_n$ 上 線形順序も明かに

$A \subset O_n$ となるが $\forall \gamma \in O_n$ に対して $A \cap \gamma \neq \emptyset$

$\forall \gamma \in O_n$ の $\gamma \in I$ の ω -稠密な最小元 α

(A) $\alpha \in \beta$, β は β の真の子集合または $\beta = \beta$
または β は β の真の子集合で成り立つ
 $\beta \in d$

があるが, α は Y , O_n の最小元である. 因

補足 $X \subset O_n$ X は I の ω -稠密的 $\cup X \in O_n$

で $\cup X$ は $\in I$ である X の "極限".

証明 $\cup X$ は ω -稠密的 (演習)

$\in I$ $(\cup X)^c$ は w.o. ... 因

↑ 定理 3, (1) と 補題 1, (3)
によりよい.