「公理的集合論：
数学が全て展開できる
しくみについて研究

— 数学の基礎づけの研究
— 数学そのもの
— 数学の自動化の研究

独立性命題の研究

ゲーデルの不完全性定理から
公理的集合論の中で、真偽の
決定できない命題がたくさん出てくる。

独立命題

forcing（強制法）という手法を
使って"多くの数学的な"命題が
独立命題であることが証明できる。
この手法に必要となる集合論の
基礎について講義する。

3号とう 4階
渕野グループ
プレゼンテーション室

独立命題の例

連続体仮説
(Cantor 186?) 自然数の全体を実数の
全体の中に onto にうめこめない。
どんな $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対しても $f[\mathbb{N}] \subsetneq \mathbb{R}$ となる

"実数の集合は自然数の集合よりサイズが
大きい" ($|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$)

Cantor $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の間の無限の大きさ
は存在しない？ 連続体仮説 (CH)
Continuum Hypothesis

(196? P. Cohen) 連続体仮説は通常の
集合論の公理系からは CH の真偽は
決着できない。

"$|\mathbb{R}|$ 個未満の個数の測度ゼロ集合の
和集合はふたたび測度ゼロである"

http://fuchino.ddo.jp/kobe/

独立

$P(\mathbb{N})/fin$: 自然数の部分集合の
全体を"差集合が有限"という関係で
わって作られるブール代数を考えて
その自己同形群 $Aut(P(\mathbb{N})/fin)$ を考える ①

Wikipedia:
独立
List of statements independent
from ZFC
Axiom System of Zermelo and Fraenkel
with Axiom of Choice

② "$Aut(P(\mathbb{N})/fin)$ は単純群になる"
は ZFC から独立。
⋮

素朴公理的集合論 ZFC

(Zermelo-Fraenkel Set Theory with the Axiom of Choice)

基本記号 $\in$, $=$

すべてのオブジェクトは集合だと考える。

$x \in y$ は "(集合)x は(集合)y の要素である" と "解釈" する。

$x = y$ xとyは等しい。

(外延性公理) Extensionality すべての x, y に対し、

$x = y \iff$ すべての z に対して ($z \in x \iff z \in y$)

注意

上の公理を $=$ の定義と考えるとこの定義から

$$\begin{cases} x=y \text{ かつ } y=z \text{ なら } x=z \\ x=y \text{ なら } y=x \\ x=x \end{cases}$$

が導ける

$x \notin y$: $x \in y$ でない の略記

(空集合公理) Axiom of Empty-set すべての z に対し

$z \notin x$ となるような x が存在する。

上のような x は外延性公理から一意に決まるので

これを ϕ であらわす。この記号は略記として

導入されていると考える。たとえば

"$\phi \in x$" は "ある y で すべての z に対して (すべての)

$z \notin y$ かつ $y \in x$ となるものがある" という主張の略

と思う。 (となるものに対して) (となる)

"$x = \{y, z\}$" は "すべての u に対して $u \in x \iff u = y$ または $u = z$"

"$x \in \{y, z\}$" は "$x = y$ または $x = z$" の略と考える。

(対の公理) Pairing Axiom すべての x, y に対して

z で すべての u に対し $u \in z \iff$

$u = x$ または $u = y$ となるものが存在する。

上の z を $\{x, y\}$ とあらわすことにする。

$x = y$ のときは $\underbrace{\{x\}}_{\text{これを}}$, $\{y\}$ であらわす。

singleton x y

ここまでの部分で たとえば次のような集合の

存在が保証されている。

ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\{\phi\}\}$ …

$\phi \neq \{\phi\}$: $\phi \notin \phi$ だが $\phi \in \{\phi\}$

により ϕ と $\{\phi\}$ は異なる

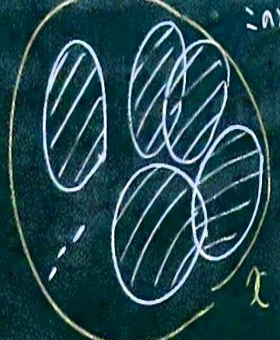
([illegible]) すべての x に対し y

Axiom of Union

で，すべての z に対して

$z \in y \Leftrightarrow$ ある $u \in x$ に対して $z \in u$

となるようなものが存在する



このとき，

$y = \bigcup x$

y は集合族 x の和集合

Union of x

$y = \{z \mid$ ある $u \in x$ に対して $z \in u\}$

などと書く．

補題 x, y, z に対し u で

$v \in u \Leftrightarrow v = x$ または $v = y$ または $v = z$

となるものが存在する

証明 $u = \bigcup\{\{x, y\}, \{z\}\}$ とおるとこれが求めるもの． $\boxtimes$

同様 ある具体的な数 n に対して

"すべての $x_1, x_2 \cdots x_n$ に対して u で

$v \in u \Leftrightarrow v = x_1$ または $v = x_2$ または … または $v = x_n$

となるようなものが存在する" が示せる．

([illegible]) [illegible]

Separation Axiom

$\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ に対して，

変数（引数）

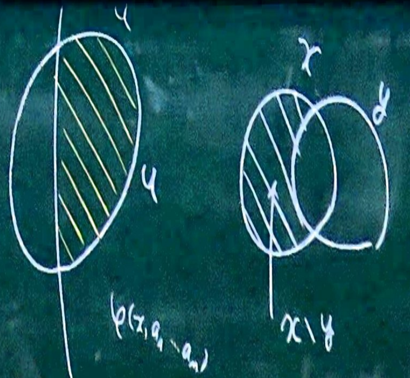
すべての（集合） $a, a_1, \cdots, a_m$ に対し，u で

すべての v に対し $v \in u \Leftrightarrow$

$v \in a$ かつ $\varphi(v, a_1, \cdots, a_m)$ となる

となるようなものが存在する．記号；

$u = \{x \in a \mid \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)\}$



和集合公理と対の公理から x, y に対して

$x \cup y = \bigcup\{x, y\}$ が存在する

分離公理から x, y に対し

$x \setminus y = \{u \in x \mid u \notin y\}$ が存在する．

和集合の公理と分離公理から すべての x に対して

$\bigcap x = \{u \in \bigcup x \mid$ すべての $v \in x$ に対して $u \in v\}$ が存在する。

あるいは $x \neq \phi$ に対して $a \in x$ を1つとって
分離公理から

$\bigcap x = \{u \in a \mid$ すべての $v \in x$ に対して $u \in v\}$ が存在する。

対の公理と上から x と y に対して

$x \cap y = \bigcap \{x, y\}$

Axiom of Infinity

(無限公理) 集合 x で $\phi \in x$ かつ すべての $u \in x$ に対し、$u \cup \{u\} \in x$ となるものが存在する。

x を上のような集合とすると、

$0 = \phi \in x$

$1 = \{\phi\} = \phi \cup \{\phi\} \in x$

$\{\phi, \{\phi\}\} = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} \in x$

$= 2$

$\{\phi, \{\phi\}\} \cup \{\{\phi, \{\phi\}\}\} \in x$

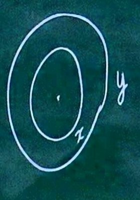
$= \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

$= 3$

$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \cup \{\{\quad\}\} \in x$

$= \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$

$= 4$



x を無限公理が存在を保証するような集合(の1つ)として、

$\omega = \{u \in x \mid$ すべての $\tilde{x}$ に対し $\tilde{x}$ が を満たすなら $u \in \tilde{x}\}$

とする。ω は無限公理を満たす集合のうち"最小"のものになっている。 部分集合に関して

この ω を自然 0, 1, 2 … の全体からなる集合と考える。

---

x, y に対し、すべての $u \in x$ が $u \in y$ となるとき、x は y の部分集合(subset)であるといい、これを $x \subseteq y$ であらわす。

外延の公理から、$x \subseteq y$ かつ $y \subseteq x$ なら $x = y$

$x \subseteq y$ かつ $y \subseteq z$ なら $x \subseteq z$

(べき集合の公理) Axiom of Power set すべての x に対し u で すべての v に対し

$v \in u \Leftrightarrow v \subseteq x$

となるようなものが存在する

記法: $u = \mathcal{P}(x)$

復習 外延性公理,

空集合公理,

対の公理,

和集合公理

分離公理 ← "確定的な集合に関する命題"に対しての公理

無限公理 ①

x で $\phi \in x$ ② $y \in x$ なら $y \cup \{y\} \in x$

となるものが存在する.

$(\mathbb{N} =)\ \omega = \bigcap \{x \mid x$ は ① ② を満たす集合$\}$

自然数の全体

$$\begin{array}{ccc} \phi & \{\phi\} & \{\phi, \{\phi\}\} \\ \| & \| & \| \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \cdots\cdots \text{ と考えて.}$$

べき集合の公理

以上で導入した公理 Zermelo が 1908年に導入した

Ernst Zermelo (1871～1953)

公理系に対応する.

ただし Zermelo の原論文では無限公理は

① $\phi \in x$ ② $y \in x \to \{y\} \in x$ で与えられている

$\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}$ ……

そこで これまでに導入した公理すべてからなる公理系を Zermelo の公理系とよび Z であらわす.

Z の中で大半の数学は展開できる.

※

Cartesian product (デカルト積)

補題 (Z) x, y に対し z で

すべての u に対し $u \in z \iff$ ある $v \in x$, $w \in y$ に対し $u = \langle v, w \rangle$ となるものがある.

$z = \{\langle v, w \rangle \mid v \in x,\ w \in y\}$

※ 順序対 (ordered pair)

x, y に対し, $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ を x と y の順序対とよび $\langle x, y \rangle$ と書く

補題 すべての x, y, x', y' に対し

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x'$ かつ $y = y'$

証明 $\Leftarrow$ は明か (外延性公理)

$\Rightarrow$ 場合1 $x = y$ のとき このときには

$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\}$ となる

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ なら $\langle x', y' \rangle$ は singleton である. ㋐

したがって $\{x'\} = \{x', y'\}$ したがって $x' = y'$ で $\langle x', y' \rangle = \{\{x'\}\}$

よって $\{\{x\}\} = \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle = \{\{x'\}\}$ により $x = x'$

また $y = x = x' = y'$

(オ) ⇒ 場合2 $x \neq y$ のとき。このときには

$\{x\} \neq \{x, y\}$ となる $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$

から、$\{x'\} \neq \{x', y'\}$ だから、$x' \neq y'$ である。

特に $\{x', y'\}$ は singleton でない。よって

$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ により $\{x\} = \{x'\}$ かつ

$\{x, y\} = \{x', y'\}$ だから $x = x'$ かつ

$y = y'$ となる。 ∎

補題の証明 $v \in X$ なら $\{v\} \subseteq X$ だから、

$\{v\} \in P(X)$ $v \in X$ $w \in Y$ なら $\{v, w\} \subseteq X \cup Y$

したがって $\{v, w\} \in P(X \cup Y)$ $P(X) \subseteq P(X \cup Y)$

したがって $\{v\}, \{v, w\} \in P(X \cup Y)$ つまり

$\{\{v\}, \{v, w\}\} \subseteq P(X \cup Y)$ よって

$$\underbrace{\{\{v\}, \{v, w\}\}}_{= \langle v, w\rangle} \in PP(X \cup Y)$$

$$Z = \{u \in PP(X \cup Y) \mid \text{ある } v \in X\ w \in Y \text{ に対し } u = \langle v, w\rangle\}$$

となり 分離公理から、Z は存在する。 ∎

補題でのような Z を X と Y のデカルト積とよび $X \times Y$ であらわす。

(XとYの直積集合)

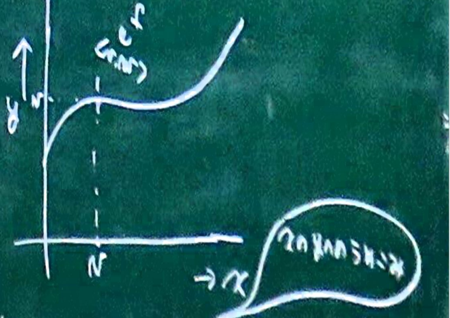
関数 X, Y に対し $X \times Y$ の部分集合で ※を満たすもの(f)を X から Y への関数(写像)とよぶ。
function mapping

$f : X \to Y$ とあらわす:

※ すべての $v \in X$ に対し、$\langle v, w\rangle \in f$ となる $w \in Y$ がちょうど1つ存在する。

$v \in X$ に対して ※でのような 1意にきまる w を $f(v)$ と書く。

$$X^Y = \{f \in P(X \times Y) \mid f \text{ は※をみたす}\}$$



例 $X \subseteq Y$ のとき $id_X : X \to Y$ を

$$id_X = \{u \in X \times Y \mid \text{ある } v \in X \text{ に対し } u = \langle v, v\rangle\}$$

として定義できる。

無限公理 次の性質を持つ x が存在する

① $\phi \in x$

② $u \in x$ なら $u \cup \{u\} \in x$

$u \neq u \cup \{u\}$ は Z からは証明できないが

すべての u に対し

ϕ, $\phi \cup \{\phi\}$, $\phi \cup \{\phi\} \cup \{\phi \cup \{\phi\}\}$ …

$\phi = 0$, $\phi \cup \{\phi\} = \{\phi\} = 1$, $\phi \cup \{\phi\} \cup \{\phi \cup \{\phi\}\} = \{\phi, \{\phi \cup \{\phi\}\}\} = 2$

は互いに異なる.

$\omega = \bigcap \{x \,;\, x$ は①②を満たす$\}$ とおく. ㋐

successor function :

$s = \{\langle n, n \cup \{n\} \rangle \mid n \in \omega\}$

$\boxed{\text{㋐ } \omega \text{ は①②を満たす 定義から } \omega \text{ は①と②を満たす集合のうち最小のものになっている.}}$

transitive

x が推移的とは, すべての $y \in x$ に対し, $y \subseteq x$ となること

(これは, "すべての $y \in x$, $z \in y$ に対し, $z \in x$" と同値)

補題 0) ω は①②を満たす.

1) すべての $X \subseteq \omega$ に対し X が①②を満たす (つまり $\phi \in X$ $n \in X$ なら $s(n) \in X$) なら, $X = \omega$.

2) すべての $n \in \omega$ は推移的である

3) すべての $n \in \omega$ に対し, $s(n) \neq n$ 特に $n \notin n$

4) すべての $n \in \omega$ 対し $n \neq \phi$ なら, $s(m) = n$ となるような $m \in \omega$ が存在する

5) すべての $n, n' \in \omega$ に対し $s(n) = s(n')$ なら $n = n'$.

証明 0) と 1) は ω の定義からよい.

2): 1) により $X = \{n \in \omega \mid n$ は推移的である$\}$ が①②を満たすことを示せばよい. $\phi \in X$: ϕ が推移的であることは, vacuously に成り立つ.

$u \in X$ なら $u \cup \{u\} \in X$: $y \in u \cup \{u\}$ で $z \in y$ とする

$y \in u$ なら $u \in X$ により, $z \in u \subseteq u \cup \{u\}$ となる. $y = u$ なら $z \in u \subseteq u \cup \{u\}$ となりよい.

3): $\underset{n \cup \{n\}}{s(n)} \neq n$ なら $\{n\} \subseteq n$ つまり $n \notin n$ である

$X = \{n \in \omega \mid s(n) \neq n\}$ が①と②を満たすことを示せばよい. $\phi \in X$: $s(\phi) = \{\phi\}$ となり ϕ ではない. したがって $\phi \in X$ $s(n) \neq n$ とし $s(s(n)) \neq s(n)$ を示す. もし $s(s(n)) = s(n)$ だったとすると, $s(n) \cup \{s(n)\} = s(n)$ より ㋐

(7) $\underset{\displaystyle m\cup\{m\}}{\underset{\shortparallel}{\sigma(m)}} \in \underset{\displaystyle n\cup\{n\}}{\underset{\shortparallel}{\sigma(n)}}$ となる

もし $m\cup\{m\} \in n$ とすると $m \in n$ となり

$\sigma(n) \neq m$ の仮定に矛盾

$n\cup\{n\} \in \{n\}$ つまり $\underbrace{n\cup\{n\}}_{\sigma(n)} = n$ なら これは

仮定に矛盾.

したがって $\sigma(\sigma(m)) \neq \sigma(n)$ つまり $\sigma(m) \in X$.

よって $X = \omega$.

4): $X = X' \cup \{\emptyset\}$, $X' = \{ n\in\omega \mid n = \sigma(m)$ となる $m\in\omega$ が存在する $\}$

として X が ①, ② を満たすことを示せばよい.

$\emptyset \in X$ は定義から明か $m \in X$ として $\sigma(m) \in X$ を示す

$m = \emptyset$ のときには $\sigma(m)$ は $\sigma(\emptyset)$ なので $m \in X' \subseteq X$

$m \in X'$ のときも $\sigma(m)$ は $\sigma(n)$ なので, $\sigma(m) \in X'$.

したがって $X = \omega$ となるから 0以外の $n\in\omega$ は $\underbrace{\text{“1つ前の要素”を持つ}}_{X'\text{に入る つまり}}$.

5): $X = \{ n\in\omega \mid$ すべての $n'\in\omega$ に対 $\sigma(n') = \sigma(n)$ なら $n' = n \}$

として $X \ni \emptyset$, $m \in X$ なら $\sigma(m) \in X$ を示せばよい.

$\emptyset \in X$ を示すためには $\sigma(u) = \sigma(\emptyset) \Rightarrow u = \emptyset$ を言えば

よい. $\sigma(u) = \sigma(\emptyset)$ なら $u\cup\{u\} = \sigma(u) = \sigma(\emptyset) = \{\emptyset\}$

なので $u \in \{\emptyset\}$ だから, $u = \emptyset$.

$m \in X$ なら $\sigma(m) \in X$ を示す.

$\underbrace{\sigma(\sigma(m)) = \sigma(m')}$ として $\sigma(m) = m'$ を示す.

$\sigma(m) \cup \{\sigma(m)\} = m' \cup \{m'\}$

もし $\sigma(m) \neq m'$ なら $\underset{\displaystyle m\cup\{m\}}{\underset{\shortparallel}{\sigma(m)}} \in m'$ となるが このことと 2)

$m\cup\{m\} \subseteq m'$ となり $\underset{\displaystyle m'\cup\{m'\}}{\underset{\shortparallel}{m\cup\{m\}\cup\{\sigma(m)\}}} \subseteq m'$ となり $m'\cup\{m'\} = m'$

となり 3) に矛盾.

以上と 1) から $X = \omega$ となる. ⊠

__補題__ $n\in\omega$ なら $n \subseteq \omega$ である.

__証明__ $X = \{ n\in\omega \mid \overset{(*)}{\text{すべての } m\in n \text{ に対し}}\ m\in\omega \}$

として, X が ①, ② を満たすことを示せばよい.

$\emptyset \in X$ は vacuously に成り立つ.

n が (*) を満たすとすると, $m \in \overset{\displaystyle n\cup\{n\}}{\overset{\shortparallel}{\sigma(n)}}$ として,

$m \in n$ なら仮定より $m \in \omega$ $m = n$ なら明かに

$m \in \omega$ したがって $\sigma(n)$ も (*) を満たす. ⊠

ω 上の順序 $\leq$ を $n \leq m \Leftrightarrow n \subseteq m$ と定義する

$\leq$ は $\omega\times\omega$ の部分集合

$\{\langle n,m\rangle\in\omega\times\omega \mid n\subseteq m\}$ として とらえられる.

補題 (1) $\leq$ は ω 上の線形順序で

(2) 0 は $\leq$ に関する最小元である.

(3) すべての $X\subseteq\omega$ に対して X の $\leq$ に関する最小元が存在する. (4) $p(n)$ は $\leq$ に関して n の次の元を与える関数となっている.

証明 (1): $\leq$ は順序である:

$n\leq n$ は $n\subseteq n$ により明か.

$n\leq m$, $m\leq n \Rightarrow m=n$ も $\subseteq$ の対応する性質から明か

$n\leq m$ $m\leq l \Rightarrow n\leq l$ は $\subseteq$ の推移律からよい.

$\leq$ は線形であることは,

$X=\{n\in\omega \mid$ すべての $m\in\omega$ に対し, $n\subseteq m$ または $m\subseteq n\}$

として X が ①, ② を満たすことを示せばよい.

$\emptyset\in X$: $\emptyset\subseteq x$ がすべての集合 x に対して言えるので特に $\emptyset\subseteq m$ がすべての $m\in\omega$ に対し成り立つからよい.

$n\in X$ (つまり n はすべての $m\in\omega$ に対し $m\subseteq n$ または $n\subseteq m$ が成り立つ) とする.

このとき $p(n)$ もこの性質を持つことを示す. $m\in\omega$ とすると仮定から, $m\subseteq n$ または $n\subseteq m$ となっている.

が $m\subseteq n$ なら $m\subseteq n\subseteq n\cup\{n\}=p(n)$ である.

$n\subseteq m$ だが $n=m$ なら $m=n\subseteq n\cup\{n\}=p(n)$

そうでないとき, m は n に含まれない要素 k を持つ

このとき, …

$\{\{x\},\{x,y\}\}$

$\|$

$\mathrm{dom}(f)=\{x \mid \langle x,y\rangle\in f$ となる y が存在する$\}$

$=\{x\in\bigcup\bigcup f \mid$ 〃 $\}$

$\mathrm{range}(f)=\{y \mid \langle x,y\rangle\in f$ となる x が存在する$\}$

$=\{y\in\bigcup\bigcup f \mid$ 〃 $\}$

$u\subseteq\mathrm{dom}(f)$ に対し

$f''u=\{y\in\mathrm{range}(f) \mid$ ある $x\in u$ に対し, $\langle x,y\rangle\in f\}$

$\|$

$f[u]$

復習

$\omega = \bigcap\{W \mid \phi \in W,\ \forall x \in W\ (x \cup \{x\} \in W)\}$ ① ②

$s(x)$

[illegible]

補題1

(0) ω は ① ② を満たす

(1) すべての $X \subseteq \omega$ X が ① ② を満たすなら $X = \omega$

(2) すべての $m \in \omega$ は推移的である

(3) すべての $n \in \omega$ に対し、[illegible] 特に [illegible]

(4) すべての $n \in \omega$ に対し $n \neq 0 \ (=\phi)$ なら、$s(m) = n$ となる $m \in \omega$ が存在する

(5) すべての $m, m' \in \omega$ に対し $s(m) = s(m')$ なら $m = m'$

補題2

(1) すべての $m, n \in \omega$ に対し、$m \in n$ (α) または $m = n$ (β) または $n \in m$ (γ) のうちのちょうど1つが成り立つ

(2) すべての $m, n \in \omega$ に対し、$m \in n \Leftrightarrow m \subsetneq n$ （⇒は補題1(2)による）

(3) すべての $m, n \in \omega$ に対し、$m \subsetneq n$ または $m = n$ または $n \subsetneq m$ のうちのちょうど1つが成り立つ

(4) $\in$（または $\subsetneq$）は ω 上の線形順序である

証明 (1):

(1)の α β γ が（互いに）排他的であることは、補題1(2)(3)によりよい。たとえば もし、$n \in m$ (α) かつ $m \in n$ (γ) なら 1(2)より $m \in m$ となってしまい 1(3)に矛盾。

$$X = \{n \in \omega \mid \text{すべての } m \in \omega \text{ に対して } m \neq n \text{ なら } m \in n \text{ または } n \in m \text{ が成り立つ}\}$$

とって、$X = \omega$ を示せばよい。このためには X が ① ② を満たすことを示せばよい。

① $\phi \in X$:

$$X_1 = \{m \in \omega \mid m = \phi \text{ または } \phi \in m\}$$

とって $X_1 = \omega$ が示せればよい。このためには X_1 が ① ② を満たすことが示せればよい。

①: $\phi \in X_1$ は明らか。②:

$m \in X_1$ とすると、$m = \phi$ または $\phi \in m$

だがこのとき、$\underbrace{m \cup \{m\} \ni \phi}_{\text{いずれの場合にも}}$ となり、$m \cup \{m\} \in X_1$

② $n \in X \to n \cup \{n\} \ (= s(n)) \in X$: $n \in X$ とって、

$$X_2 = \{m \in \omega \mid m \in s(n) \text{ または } m = s(n) \text{ または } s(n) \in m\}$$

とって、$X_2 = \omega$ が示せれば、$n \cup \{n\} \in X$ が言える。

このためには、X_2 が ① と ② を満たすことを示せばよい。

③ ①: $p(m) \neq \phi$（p の定義より明らか）なので $X_1 = \omega$ から, $\phi \in p(m)$ となり, $\phi \in X_2$

②: $m \in X_2$ として $\underset{m\cup\{m\}}{\underset{\parallel}{p(m)}} \in X_2$ を示す:

$m \in X_2$ により, "ⓐ $n \in p(m)$ または ⓘ $n = p(m)$ または ⓤ $p(m) \in n$" が成り立っている.

ⓐ $n \in p(m) = m \cup \{m\}$ なら, $n \in m$ または $n = m$

$n = m$ なら $p(m) = p(n)$ だから, $p(m) \in X_2$

$n \in m$ なら, $\underbrace{m \in X}_{1(3)の m \neq n を使用}$ だったので, $p(m) \in n$ または $p(m) = n$ または $n \in p(m)$ のどれかが成り立っている.

$n \in p(m)$ ではない: $n \in p(m)$ なら, $n \subseteq p(m)$ だが, $n \in m$ だから $p(m) = m \cup \{m\} \subseteq n$

したがって $p(m) \subseteq n \subseteq p(m)$ したがって $\underline{n = p(m)}$ となり $\Downarrow n$

補題1(3)に矛盾.

したがって $p(m) \in n$ または $p(m) = n$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$p(m) \in n \cup \{n\} = p(n)$ 　 $p(m) \in n \cup \{n\} = p(n)$

となりいずれの場合も $p(m) \in X_2$ である.

ⓘ なら, $p(m) = n \in n \cup \{n\} = p(n)$ だから, $p(m) \in X_2$ である.

ⓤ なら $p(m) \in n \subseteq n \cup \{n\} = p(n)$ だから, $p(m) \in X_2$ である. ☒

(2): $n \in m \Rightarrow n \subsetneq m$ は 補題1②によりよい

$n \neq m$ とすると, (1) から, $n = m$ 又は $m \in n$

したがって $m \subseteq n$ となり $n \subsetneq m$ ではありえない.

(3): (1) と (2) から明らか

(4): (1) と (2) から明らか. □

<u>補題3</u> すべての $X \subseteq \omega$ に対し,

① $\phi \in X$ ②′ $m \in X$ かつ $m \subseteq X$（つまり $\in$ に関して m より小さな自然数もすべて X に入っている）なら $m \cup \{m\} \in X$

なら, $X = \omega$

<u>証明</u> $X_0 = \{ n \in X \mid n \subseteq X \}$ とおくと,

$X_0 \subseteq X \subseteq \omega$ なので, $X_0 = \omega$ を示せばよい

このためには X_0 が ①② を満たすことを示せばよい.

X_0 は ① を満たす: $\underbrace{}_{\phi \in X}$ $\phi \subseteq X$ だから, $\phi \in X_0$

X_0 は ② を満たす: $m \in X_0$ とすると, $m \in X$ かつ $m \subseteq X$

なので ②′ を X が満たすことから, $m \cup \{m\} \in X$

だが, $m \cup \{m\} \subseteq X$ でもあるから, $\underset{p(m)}{\underset{\parallel}{m \cup \{m\}}} \in X_0$ ☒

補題4 すべての $X\subseteq\omega$ に対し、$X\neq\phi$ なら X は $\in$ に関する最小元を持つ。

証明 $X\subseteq\omega$ が $\in$ に関する最小元を持たないとして、$X=\phi$ となることを示す。このためには、$Y=\omega\setminus X$ として $Y=\omega$ が示せればよい。このためには補題3により、Y が①と②'を満たすことを言えばよい: ① $\phi\in Y$:

$\phi\in X$ だとすると ϕ は ω の最小元なので X の最小元ともなり仮定に矛盾。したがって $\phi\notin X$ $\phi\in Y$.

$A\setminus B=\{a\in A\mid a\notin B\}$

②' $n\in Y$ $n\subseteq Y$ として $n\cup\{n\}\in Y$ を示す。もし $n\cup\{n\}\notin Y$ なら、$n\cup\{n\}\in X$ だが、$n\cup\{n\}$ は X の最小元でないので、$m\in n\cup\{n\}$ で $m\in X$ となるものがある。しかし、このとき、$m\in n$ または $m=n$ なので いずれの場合にも、n に対する仮定から、$m\in Y$ つまり $m\notin X$ となり矛盾。したがって $n\cup\{n\}\in Y$ である。 $\boxtimes$

演習 以上を用いて (1) $a:\omega\times\omega\to\omega$ で

$$a(\langle n,0\rangle)=n$$
$$a(\langle n,s(m)\rangle)=s(a\langle n,m\rangle)$$

となるようなものが1意に存在する (a は ω 上の加法)

$s(m)$ を "$m+1$" と書くとこれは $a(\langle n,m+1\rangle)=a(\langle n,m\rangle)+1$ と書きなおせる。

(2) $m(\langle n,0\rangle)=0$

$$m(\langle n,s(m)\rangle)=a(m\langle n,m\rangle,\ n)$$

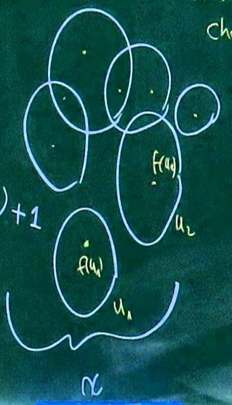
となるような $m:\omega\times\omega\to\omega$ が1意に存在する。

Axiom of Choice
(選択公理, AC)

任意の x に対し、$\phi\notin x$ なら、

$f:x\to\bigcup x$ ですべての $u\in x$ に対し、$f(u)\in u$ が存在する。

x の選択関数
choice function on x



Z と AC をあわせた体系を ZC とよぶ。

復習（選択公理 AC）

選択関数 choice function

$\phi \notin x$ なら，$f : x \to \bigcup x$ で

すべての $u \in x$ に対し，$f(u) \in u$ となるものが

存在する．　Z + AC を ZC と書く

補題 (1) 次は Z 上で同値である．

(a) AC；

(b) $\phi \notin x$ ですべての異る $u, v \in x$ に対し $u \cap v = \phi$ となるような x に対し選択関数が存在する

(c) すべての x, y と上射 $f : x \to y$ に対し単射 $g : y \to x$ で $f \circ g = id_y$ となるものが存在する．

$f : x \to y$ が上射とは $f''x = y$

surjection　　　$f''x$ = image(f)

単射 injection

$f : x \to y$ が単射とは（すべての）$u, v \in x$ $u \neq v$ に対し　$f(u) \neq f(v)$ となること

$f \circ g = \{ \langle u, w \rangle \in y \times x \mid$ ある $v \in x$ に対し $g(u) = v$ かつ $f(v) = w \}$

$id_y = \{ \langle u, u \rangle \mid u \in y \}$

$f : x \to y$ が全単射

$\Leftrightarrow$ f は上射かつ単射

(d) すべての x, y に対し，上射 $f : x \to y$ が存在するか，あるいは，上射 $g : y \to x$ が存在する．

e) x, y に対し上射 $f : x \to y$ が存在するなら単射 $g : y \to x$ が存在する

f) (Dual Cantor-Bernstein Thm)

x, y に対し，x から y への上射が存在し y から x への上射が存在するなら，全単射：$f : x \to y$ が存在する．

<u>Cf.</u> (Cantor-Bernstein Thm) x から y への単射が存在し y から x への単射が存在するなら，全単射 $f : x \to y$ が存在

(Cantor-Bernstein は Z で証明できる)

2) ZC で証明できるが Z や後出の ZF からだけでは証明できないことが知られている

証明の1部　(a) $\Rightarrow$ (b) 明らか

(b) $\Rightarrow$ (a)　$\phi \notin x$ とするとき，

$\tilde{x} = \{ \underbrace{\{u\} \times u}_{\in \mathcal{P}(x) \times x} \mid u \in x \}$ とおく

$\phi \notin \tilde{x}$ で，$\underset{\tilde{u}}{\{u\} \times u}$，$\underset{\tilde{v}}{\{v\} \times v} \in \tilde{x}$ を異る元とすると，

とすると，$\tilde{u} \cap \tilde{v} = \phi$ となるから (b) により，

選択関数 $\tilde{f} : \tilde{x} \to \bigcup \tilde{x}$ が存在する．

$f = \{ \langle u, p \rangle \mid u \in x\ \tilde{f}(\{u\} \times u) = \langle u, p \rangle \}$

とおくと，f は x 上の choice function である．

(a) ⇒ (c)

$z = \{ f^{-1}{}''\{v\} \mid v \in y \}$

$\neq \phi$

とすると f が全射より $\phi \notin z$ となるから、

z に AC を用いて 選択関数 $\xi : z \to \bigcup z$

$g = \{ \langle v, u\rangle \mid \xi(f^{-1}{}''\{v\}) = u \}$ とすると、

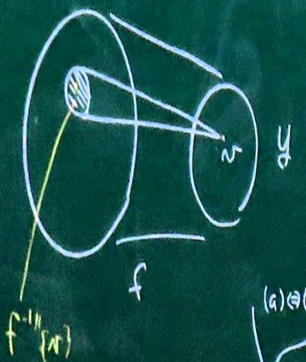
$\in y \times x$

$f \circ g = \mathrm{id}_y$ となる.

$f^{-1} = \{ \langle v, u\rangle \in y \times x \mid \langle u, v\rangle \in f \}$

ZFC

Zermelo - Fraenkel set theory with Axiom of Choice



(a)⟺(b) により

(c) ⇒ (a) : $\phi \notin x$ とする 一般性を失うことなく $u, v \in x$ $u \neq v$ ならば $u \cap v = \phi$ と仮定してよい. このとき 全射 $f : \bigcup x \to x$ を

$f = \{ \langle p, u\rangle \in \bigcup x \times x \mid u$ は $p \in u$ となる ただ1つ決まる x の要素$\}$ と定義すると

[illegible] f は全射になる. [illegible] $\to \bigcup x$ [illegible]

単射で $f \circ g = \mathrm{id}_x$ となるものとすると g は x 上の選択関数である.

(d) は 後でやる.

ZC ⇒ (e) は明か. (ZC ⇒ (c) ⇒ (e))

(f) も 後でやる.

Axiom of Replacement

(置換公理) すべての確定的な (集合に関する) 性質 $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_m)$ と $a_1 \ldots a_m$ と a_0 に対し

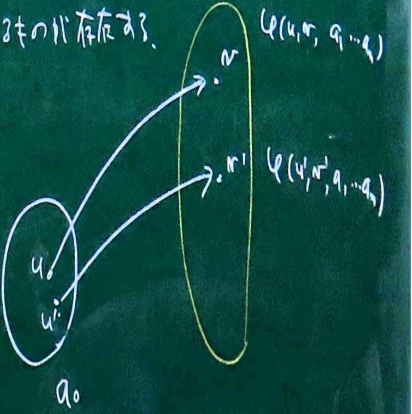
すべての $u \in a_0$ に対し, $\varphi(u, v, a_1, \ldots, a_m)$ となる v が 高々1つ存在するとき,

[illegible]

$v \in b \iff$ ある $u \in a_0$ に対して

$\varphi(u, v, a_1, \ldots, a_m)$ が成り立つ

となるものが存在する.



Axiom of Foundation

(基礎の公理)

正則性の公理

Axiom of Regularity

すべての空でない x に対し，$y \in x$ で

$x \cap y = \phi$ となるものが存在する.

いままでの公理で AC 以外のものを集めた体系を

ZF とよび ZF+AC を ZFC とよぶ

定理 (ZF) すべての集合 x に対し，$x \notin x$ である.

証明 $x \in x$ となる x が存在するとして矛盾を導く

このとき $\{x\}$ を考えると $\{x\} \neq \phi$ だが，$\{x\}$ の

任意の要素 u に対し $u = x$ だが $x \in x = u$

$x \in \{x\}$ なので $\underset{\neq \phi}{u \cap \{x\}} \ni x$ となり $\{x\}$ が基礎の公理

の反例になってしまう. $\boxtimes$

特に任意の集合 x に対し $\underset{x}{x} \neq \underset{x}{x \cup \{x\}}$

以下はお話し.

$\aleph_0$ で自然数の"濃度"をあらわし，
cardinality

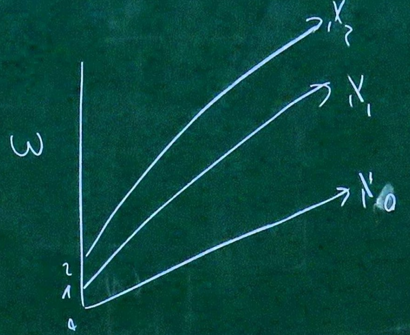
$\aleph_n$ で $\aleph_0$ より大きな基数 (無限集合のサイズ)

をあらわす. $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n \in \omega\}$ は

ZF では存在するが Z では集合

$\{\aleph_n ; n \in \omega\}$ の存在が証明できないため $\aleph_\omega$ の

存在も証明できない.



形式論理でのZFCの定式化
- formal logic

一階の述語論理

集合論"外"で考える.

metamathematics

meta logic

記号:
- 変数記号: $x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, y_1, \dots$ など
- 関数記号 $f_1, f_2, \dots$ 各関数記号 f には f の変数の数 (arity) が定まっているものとする
  0変数の関数記号も考える (定数とみなす)
- 関係記号: $R_1, R_2, \dots, S_1, S_2, \dots$
  これについても各関係記号に対して変数の数が定まっているものとする
- $\equiv$ (等号), '(' ')' かっこ ',' コンマ
- 論理演算子 '$\wedge$'$_{\text{and}}$ '$\vee$'$_{\text{or}}$ '$\neg$'$_{\text{not}}$ '$\rightarrow$'$_{\text{then}}$
- 量化子 '$\exists$'$_{\text{exists}}$ '$\forall$'$_{\text{for all}}$

$\mathcal{L}$ が言語とは $\mathcal{L}$ は有限の関数記号と関係記号の 有限な セットとなっていること.

言語 $\mathcal{L}$ があたえられたとき, 記号列 t が $\mathcal{L}$-項 ($\mathcal{L}$-term) であるということを次のように再帰的に定義する:

(1) 変数記号は (長さ1の記号列として) $\mathcal{L}$-項である.

(2) f が $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号で かつ $t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項のとき, $\underbrace{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}_{\text{記号列}}$ は $\mathcal{L}$-項である

(3) $\underbrace{f}_{\mathcal{L}\text{の関数記号}}$ が 0変数の関数記号のときには $\underbrace{f}_{\text{記号列}}$ は $\mathcal{L}$-項である

(4) 以上のみ ($\mathcal{L}$-formula)

記号列 φ が $\mathcal{L}$-論理式であるということを次のように再帰的に定義する.

(1) t_1, t_2 が $\mathcal{L}$-項のとき

$t_1 \equiv t_2$ は $\mathcal{L}$-論理式である.

(2) R が $\mathcal{L}$ の n 変数関係記号で, $t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項のとき,

$R(t_1, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-論理式である

原子論理式

atomic formula

(3) φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式のとき,

$\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ $(\varphi \rightarrow \psi)$

は $\mathcal{L}$-論理式

(4) φ が $\mathcal{L}$-論理式で x が変数記号のとき

$\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ は $\mathcal{L}$-論理式 (5) 以上のみ.

与えられた言語$\mathcal{L}$において $\mathcal{L}$論理式に関する証明の概念を導入する:

論理公理とよばれる$\mathcal{L}$-論理式の集まりを
Logical axioms 定義する。たとえば

トートロジー: 命題論理で恒真な命題
たとえば$(A \vee \neg A)$などの命題変数に
$\mathcal{L}$論理式を代入して得られる論理式全部。
(たとえば φを一つの$\mathcal{L}$論理式として $(\varphi \vee \neg\varphi)$)

等号の公理 $x \equiv x$

言語$\mathcal{L}$のm変数関係記号

$$((x_1 \equiv y_1 \wedge \cdots \wedge x_m \equiv y_m) \to (R(x_1, \cdots, x_m) \to R(y_1, \cdots, y_m)))$$

など、……

推論規則

三段論法 $\dfrac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$

存在推論 $\dfrac{(\varphi \to \psi)}{(\exists x \varphi \to \psi)}$

ただし x は ψ の中には変数として
あらわれないものとする。

この体系を K
とよぶことにして
Das Aussagenkalkül
(命題計算(独))

Tを$\mathcal{L}$-文の集まり
とするとき、Tから$\mathcal{L}$論理
式φがKで証明できる
あるいは論理式の列Pは
KでのφのTからの
証明である:

$T \vdash_K \varphi$ $\quad T \vdash^P_K \varphi$

それは次のように定義する: $T \vdash^P_K \varphi$

Pが Kでの φの T からの証明であるとは、

Pは$\mathcal{L}$-論理式の列 $\varphi_0\ \varphi_1 \cdots\ \varphi_n$ で
$\varphi_n = \varphi$, Pの各φ_iは 論理公理の1つであるか
Tの要素であるかあるいは $i_0, i_1 < i$ に対して、
$\dfrac{\varphi_{i_0}\ \varphi_{i_1}}{\varphi_i}$ が推論規則の1つであるか $\dfrac{\varphi_{i_0}}{\varphi_i}$ が
推論規則のうちの1つであるかのどちらかが成り立っている。

あるPに対し、$T \vdash^P_K \varphi$ のとき $T \vdash_K \varphi$ と書く。

$\mathcal{L}$-論理式 φ は φ にあらわれる変数記号が(全て)
すべて $\exists x \psi$ または $\forall x \psi$ という形の
$\mathcal{L}$-論理式で φ の部分列となっているものの中に
表われるとき $\mathcal{L}$-文であるという。

集合論の言語

$\mathcal{L}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$

↑2変数の関係記号

xがφにあらわれる
[illegible] $\exists x\psi$
$\forall x\psi$の[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

$x_1 \cdots x_n$がφの自由変数すべて
[illegible] $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ [illegible]

(外延性公理)

$$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

$$((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x))$$

(空集合公理) $\exists x \forall y\, (y \notin x)$

⋮

$y \notin x$ は $\neg\, y \in x$ の略記

(分離公理) $\varphi = \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$

すべての $\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi = \varphi(z, x_1, \dots, x_n)$ に対し

$$\forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z \in x_0 \wedge \varphi(z, x_1, \dots, x_n)))$$

⋮

置換公理 $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall u\, (\forall x\, (x \in u \to \exists ! y\, \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n))$$
$$\to \exists z\, (\forall y\, (y \in z \leftrightarrow \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)))))$$

$\exists ! y\, \psi$

$$\leftrightarrow \exists y \psi \wedge \forall y' \forall y'' (\psi(y/y') \wedge \psi(y/y'') \to y' = y'')$$

http://fuchino.ddo.jp/kobe/forcing-LN-2015.pdf

ZFC での"クラス"の扱い

$\{x \mid \varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ が集合でない

ときにも これをある種の"オブジェクト"として扱いたい。

これをこれのように考えることし、矛盾なく扱いて：

$\left.\begin{array}{l}\varphi = \varphi(x, x_0, \ldots, x_{n-1}) \\ \psi = \psi(x, x_0, \ldots, x_{m-1})\end{array}\right)$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式とする。

このとき，$ZFC, \psi(u, a_0, \ldots, a_{m-1}) \vdash^{K} \varphi(u, a_0, \ldots, a_{n-1})$

（これは $ZFC \vdash^{K} (\psi(u, a_0, \ldots, a_{m-1}) \rightarrow \varphi(u, a_0, \ldots, a_{n-1}))$

と同値。）

となっているとき，このことを

"$\psi(u, a_0, \ldots, a_{m-1})$ となるような $\underbrace{a_0, \ldots a_{n-1}}_{u}$ に対して，

クラス $\mathcal{X}$ を

$\mathcal{X} = \{x : \varphi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ と

定義すると $u \in \mathcal{X}$ である"

と表現することにする。

例 $\mathcal{G}$ をすべてのアーベル群の全体とする。

同様に，$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\psi(x, x_0, \ldots, x_{m-1})$ に対し

$\varphi = \varphi(\qquad)$

$ZFC, \psi \vdash^{K} \forall z\,(z \in x \leftrightarrow \varphi(z, x_0, \ldots, x_{n-1}))$

となるとき

"$\psi(u, a_0, \ldots, a_{m-1})$ となるような $u, a_0, \ldots, a_{m-1}$ に対し，

$\mathcal{X} = \{z : \varphi(z, a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ として

$u = \mathcal{X}$ である"

$\mathcal{X} \in x \quad \mathcal{X} \in y \quad \ldots\ldots$

すべての集合 a は，$\{x : x \in a\}$

としてクラスとみなせる。

クラス $\mathcal{X}$ が集合でないとき，$\mathcal{X}$ は真のクラスで

あるという（proper class）

定理1（Russell）$u = \{x : x \notin x\}$ となる集合は存在しない。つまり $\{x : x \notin x\}$ は真のクラスである

証明 もし $u = \{x : x \notin x\}$ となる u があったとして，

この u に対し，$u \in u$ とすると，u の定義から $u \notin u$ となり矛盾

一方 $u \notin u$ とすると u の定義から $u \in u$ となってしまい矛盾。したがって
$u=\{x : x\notin x\}$ となる u は存在しない。 ☒

$V=\{x : x=x\}$ とする。このとき

定理2 (ZC) $u=V$ となる集合 u は存在しない。つまり V は真のクラスである。

証明 もし $u=V$ となる u があったとすると、

$$\{x : x\notin x\} = \{x\in u : x\notin x\}$$

となるから分離公理から、$\{x : x\notin x\}$ が集合となってしまい矛盾。 ☒

系3. (ZC) 任意(集合) x に対し、$y\notin x$ となる y が存在する

証明 定理2から $x\neq V$ なので $y\in V$ で $y\notin x$ となるものが存在する。

有限列のZFCでの扱い

$\langle a,b\rangle$ を a と b からなる長さが2の列と見ることができる

$\langle a_0,a_1,a_2\rangle = \langle a_0,\langle a_1,a_2\rangle\rangle$ を a_0, a_1, a_2 からなる長さが3の列と見ることができる ……

このやり方では、たとえば "X の要素の有限列のすべて" を集合としてとらえることがうまくできなくなってしまう！

そこで集合 X に対して有限列とは ω の要素 m の上の関数と考えることにする。

$m=\{0,\dots,m-1\}$ と考えられるから、$f: m\to X$ のとき f を

$f(0)\,f(1)\cdots f(m-1)$ を並べた有限列と解釈する。

$${}^{\omega>}X = \{f : \text{ある } m\in\omega \text{ に対し、} f: m\to X\}$$

は X の要素を(重複を許して)並べた有限列の全体の集合と考えることができる。

${}^{\omega>}X \subseteq \mathcal{P}(\omega\times X)$ なので、${}^{\omega>}X$ は集合である。

$s\in{}^{\omega>}X$ のとき $s: m\to X$ となる $m\in\omega$ が存在するがこの m を $\underbrace{\ell(s)}_{s\text{の長さとよぶ length}}$ とあらわす。

$s,t\in{}^{\omega>}X$ のとき

$s^\frown t$ を $u: l(s)+l(t)\longrightarrow X$ で次を

満たすものとする

$$u(k)=\begin{cases} s(k) & k<l(s) \\ t(k') & l(s)\le k<l(s)+l(t) \text{ で} \end{cases}$$

$k=l(s)+k'$

$k'<l(t)$ となっていると、

ここで $\langle a,b\rangle$ と

$\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,b\rangle\}: 2\to\{a,b\}$

が同一視できる。

$\langle a,\langle b,c\rangle\rangle$ と

$\{\langle 0,a\rangle\langle 1,b\rangle\langle 2,c\rangle\}: 3\to\{a,b,c\}$

が同一視できる etc.

このとすことは:

$Var=\{\langle 0,0,n\rangle : n\in\omega\}$

$Fnsym^k=\{\langle 1,k,n\rangle : n\in\omega\}$ $\quad k\in\omega$

$Rlsym^k=\{\langle 2,k,n\rangle : n\in\omega\}$ $\quad k\in\omega\setminus 1$

$(1=\{\phi\})$

$$\begin{array}{cccc} \{\langle 3,0,1\rangle & \langle 3,0,2\rangle & \langle 3,0,3\rangle & \langle 3,0,4\rangle \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ = & (&) & , \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \langle 3,0,5\rangle, & \langle 3,0,6\rangle, & \langle 3,0,7\rangle & \langle 3,0,8\rangle, & \langle 3,0,9\rangle & \langle 3,0,10\rangle\} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \wedge & \vee & \neg & \rightarrow & \exists & \forall \end{array}$$

$$Sym = Var\cup\underbrace{\bigcup_{k\in\omega}Fnsym^k\cup\bigcup_{k\in\omega\setminus 1}Rlsym^k}_{\parallel\ \mathcal{L}^{\omega}}$$

$\cup\{\langle 3,0,1\rangle \dots \langle 3,0,10\rangle\}$

とする。

$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}^{\omega}$ に対し、

"$D\in{}^{\omega>}Sym$ が $\mathcal{L}$-項である"

"$D\in{}^{\omega>}Sym$ が $\mathcal{L}$-論理式である"

"$P\in{}^{\omega>}({}^{\omega>}Sym)$ が $\mathcal{L}$ での T からの

証明である"

それを meta mathematics で同様に定義できる..

Lemma ω での2項演算

$+ : \omega^2 \to \omega$ で

① すべての $n \in \omega$ に対し
$n + 0 = n$

② すべての $n, m \in \omega$
$n + s(m) = s(n+m)$

となるようなものが1意に存在する.

$+(n,m)$ を $n+m$ と書くことにする.

$n + (m+1) = (n+m)+1$

証明 スケッチ

一意性の部分を強い形で示す:

$+_k : \omega \times k \to \omega$ が すべての $k \in \omega$ に対し存在

① すべての $n \in \omega$ に対し
$n +_k 0 = n$

② すべての $n \in \omega$ $m < k$ で $\underbrace{s(m) < k}_{となるもの}$ に対し

$n +_k s(m) = s(n +_k m)$

1意に存在する k に関する帰納法で示す.

このとき $+ = \bigcup_{k \in \omega} +_k$ とすれば これが求めるもので

1意性も $+_k$ の 1意性から出る.

$\boxed{\text{この細部をうめよ (演習)}}$

Lemma すべての $n, m \in \omega$ に対し
$m + n = n + m$

Lemma
$k < n + m$ $n \le k$ ならば $l < m$ で $k = n + l$
となるものが1意に存在する

証明 各 n に対 m に関する帰納法で証明.

⋮

$\mathcal{L}_{\in} = \{\in\}$

2変数関係記号

$\mathcal{L}_{\{\}} = \{\in,\ \emptyset,\ \text{"}\{\cdot,\cdot\}\text{"},\ \text{"}\bigcup(\cdot)\text{"},\ \text{"}\bigcap(\cdot)\text{"},\ \text{"}\cdot\setminus\cdot\text{"}\}$

定数記号

2変数関数記号

1変数関数記号

2変数関数記号

$\mathrm{ZFC}_{\{\}}$: ZFC

$+\ \text{"}\forall x\,(x \notin \emptyset)\text{"}$

$+\ \text{"}\forall x \forall y \forall z\,(z \in \{x,y\} \leftrightarrow (z = x \vee z = y))\text{"}$

$+\ \text{"}\forall x \forall y\,(y \in \bigcup x \leftrightarrow \exists z\,(z \in x \wedge y \in z))\text{"}$

$+\ \text{"}\forall x \forall y\,(y \in \bigcap x \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow y \in z))\text{"}$

$+\ \text{"}\forall x \forall y \forall z\,(z \in x \setminus y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y))\text{"}$

http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

このとき $\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ は ZFC の保存拡大 (conservative extension)

となる つまり, すべての $\mathcal{L}_{\in}$-論理式 φ

に対して $\mathrm{ZFC} \vdash_K \varphi \Leftrightarrow \mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash_K \varphi$

$\Rightarrow$ は明か

が成り立つ.

このとき, 数 0, 1, 2, 3 … に対応する $\mathcal{L}_{\{\}}$-項で自由変数を含まないものが作れる:

$\mathcal{L}_{\{\}}$-closed terms 閉項

$\emptyset \quad \{\emptyset\}\ (= \{\emptyset,\emptyset\}) \quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \quad \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \ \cdots$

変数記号, 関数記号 etc を前回のような集合として ($\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ で) 導入すると, 具体的に与えられた言語 $\mathcal{L}$ (つまり, meta logic で対応するものが考えられるような $\mathcal{L}$) に対して, 次が言える. $\mathrm{Term}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$ で ZFC の中での $\mathcal{L}$ 項の全体や $\mathcal{L}$-論理式の全体をあらわすと meta logic で $\mathcal{L}$-項 t や $\mathcal{L}$-論理式 φ に対して, $\mathcal{L}_{\{\}}$-閉項 $\ulcorner t \urcorner$, $\ulcorner \varphi \urcorner$ がとれて,

$$\mathrm{ZFC} \vdash_K \ulcorner t \urcorner \in \mathrm{Term}_{\mathcal{L}},\quad \ulcorner \varphi \urcorner \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$$

以下 ZFC の中で次のようなことをする.

$\mathcal{L}$ を任意の言語とするとき, $\mathfrak{A}$ が $\mathcal{L}$-構造とは, $\mathfrak{A}$ は次の形のものであることとする.

$$\mathfrak{A} = \langle A, f^{\mathfrak{A}}, r^{\mathfrak{A}} \rangle_{f\in Fn_{\mathcal{L}},\, r\in Rel_{\mathcal{L}}}$$

①

ここに $Fn_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の関数記号の全体

$Rel_{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の関係記号の全体

② $A \neq \emptyset$ ← $\mathfrak{A}$ の台集合 (underlying set)

③ $f \in Fn_{\mathcal{L}}$ が n 変数関数記号のとき, $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$

($n=0$ のときは $f^{\mathfrak{A}} \in A$
つまり $f^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$ を $f^{\mathfrak{A}}$ と同一視する)

④ $r \in Rel_{\mathcal{L}}$ が n 変数関係記号のとき, $r^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$
($n \neq 0$)

$$\boxed{A^{\emptyset} = \{f : f : \emptyset \to A\} = \{\emptyset\}}$$

t を $\mathcal{L}$-項 で t にあらわれる自由変数が $x_0, \dots, x_{n-1}$ のうちに含まれる(これを $t = t(x_0, \dots, x_{n-1})$ と書く)とき, $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ に対し

$t^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A$ を次のように $\overbrace{\text{再帰的}}^{t\text{の構成に関して}}$ に定義する:

t が x_k ($k<n$) のときには

$t^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_k$ とする.

t が 0 変数関数記号 (定数記号) f のときは

$t^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^{\mathfrak{A}}$

$t_0 \dots t_{l-1}$ に対しては $t_0^{\mathfrak{A}}, \dots, t_{l-1}^{\mathfrak{A}}$ が定まっているとして, t が ($\mathcal{L}$ の) l 変数関数記号 f により $f(t_0, \dots, t_{l-1})$ とあらわされているとき,

$t^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}), \dots, t_{l-1}^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}))$ とする.

φ を $\mathcal{L}$-論理式で φ にあらわれる自由変数が $x_0, \dots, x_{n-1}$ に含まれるとき (これを $\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ とあらわす) $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ として

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$

$\mathfrak{A}$ で変数 $x_0, \dots, x_{n-1}$ を $a_0, \dots, a_{n-1}$ と解釈したとき $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ が成り立つ. ($\mathfrak{A}$ models $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$
$\mathfrak{A}$ satisfies $\varphi(\dots)$)

ということを φ の構成に関する再帰法により定義する.

φ が $t_0 \equiv t_1$ の形をしているとき, このとき,

記号

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff t_0^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = t_1^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})$

集合論の上での同等性

r を $\mathcal{L}$ の l 変数の関係記号

$t_0, \dots, t_{l-1}$ を $\mathcal{L}$-項として

φ が $r(t_0, \dots, t_{l-1})$ のとき,

㋐ このときには

$\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1}) \iff \langle t_0^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots a_{n-1}),\dots t_{\ell-1}^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots)\rangle\in r^{\mathfrak{A}}$

とする

φ が $(\varphi_0 \land \varphi_1)$ のときには

$\lor$

$\to$

$\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1}) \iff \mathfrak{A}\models\varphi_0(a_0,\dots a_{n-1})$ かつ

または

ならば

$\mathfrak{A}\models\varphi_1(a_0,\dots a_{n-1})$

と定義する.

φ が $\neg\psi$ のときは

$\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1}) \iff \mathfrak{A}\not\models\psi(a_0,\dots a_{n-1})$

と定義する.

φ が $\exists x\,\psi$ のとき,

$\forall x\,\psi$

このときには $\psi=\psi(x, x_0,\dots,x_{n-1})$ としてよいが,

↑ x が $x_0,\dots x_{n-1}$ の中に入っているときには x を $x_0,\dots,x_{n-1}$ のリストからはずす.

$\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots a_{n-1}) \iff$ ある $a\in A$ に対し

すべての

$\mathfrak{A}\models\psi(a,a_0,\dots a_{n-1})$ 成り立つ

meta logic で定義した証明の概念を集合論の中で同様に定義できる. 特に "Pは$\mathcal{L}$での T からのφの証明である" という $\mathcal{L}_{\{\in\}}$-論理式が作れる

Kの完全性定理 ($\mathcal{Z}$で証明可能)

Tを$\mathcal{L}$-文の集合(公理系)として φを$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi=\varphi(x_0,\dots x_{n-1})$ とするとき,

すべての$\mathcal{L}$-構造$\mathfrak{A}$に対し, $\mathfrak{A}\models T$ ならすべての $a_0,\dots a_{n-1}\in A$ に対し $\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$

なら $T\vdash_K\varphi$ (i.e. $\exists P$ (Pはφの T からの証明))

注意 $\mathfrak{A}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$ の定義は変数のリストのうち自由変数として本当にφの中にあらわれるもの(x_k)に対する x_k への a_k の代入のみに依存する

Tを$\mathcal{L}$-文の集合とするとき

$\mathfrak{A}\models T \iff$ すべての $\varphi\in T$ に対し $\mathfrak{A}\models\varphi$

$\mathfrak{A}$はTのモデル

ZFC の中で 集合 $\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner \subseteq \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\in}}$ を自然に定義できる。この定義により ZFC の各公理 φ に対して

$$\mathrm{ZFC}_{\in} \vdash \ulcorner \varphi \urcorner \in \ulcorner \ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner \urcorner$$

が成り立つ。任意の記号列 φ に対し φ が ZFC の公理の1つでないときには

$$\mathrm{ZFC}_{\in} \vdash \ulcorner \varphi \urcorner \notin \ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$$

となる？

定理（Gödel の不完全性定理の集合論版）

T を $\mathcal{L}_{\in}$ を含む言語 $\mathcal{L}$ での（具体的に与えられた）公理系で ZFC での ω の要素に関する"十分な"理論の展開できるような Z の部分を含むものとする。

このとき

(1)（第1不完全性定理）T が無矛盾のとき（つまり、$T \nvdash \underline{0} = \underline{1}$）

$\underline{1} \equiv \{\emptyset, \emptyset\}$

一般には $T \nvdash \varphi$ となる $\mathcal{L}$-文 φ が存在するとき T を無矛盾という

ある $\mathcal{L}$-論理式 φ で

T として ZFC をとることができる！

$$T \nvdash \varphi \text{ かつ } T \nvdash \neg\varphi$$

となるものが存在する（具体的に構成できる）

(2)（第2不完全性定理）T を (1) と同じようなものとするとき、"$x \in \ulcorner \ulcorner T \urcorner \urcorner$" が $\mathcal{L}$-論理式として書けるが、これを使って

$$\mathrm{consis}(\ulcorner \ulcorner T \urcorner \urcorner) : \text{"}\forall P \,(P \text{ is a proof from } \ulcorner \ulcorner T \urcorner \urcorner \rightarrow P \text{ does not prove } \underline{0} \equiv \underline{1})\text{"}$$

一般には $(\varphi \wedge \neg\varphi)$

$\mathcal{L}$-文 が書ける。

このとき T が無矛盾なら

$$T \nvdash \mathrm{consis}(\ulcorner \ulcorner T \urcorner \urcorner).$$

参考文献：

- 菊池誠：不完全性定理 共立 (2015)
- 渕野昌 訳/解説, デデキント, 数とは何かそして何であるべきか ちくま学芸文庫 (2013)
- Sakaé Fuchino, On models of ZFC .pdf
  http://fuchino.ddo.jp/notes/woodin-incompl-e

$Z \underbrace{}_{\text{(十分に大きな有限部分)}}$ を含むような体系の中で議論

T をある $\mathcal{L}$-理論とするとき

T のモデル $\mathfrak{A}$ が存在するなら

$\mathrm{Consis}(T)$ である。

$$Z \vdash \exists \mathfrak{a} (\mathfrak{a} \models T \rightarrow \mathrm{Consis}(T))$$

$\mathfrak{A} \models T$ とすると すべての $\underbrace{T \vdash \varphi}_{\text{(証明の体系の健全性を使う)}}$ となる $\mathcal{L}$-文 φ に対して $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる。もし

$\mathrm{Consis}(T)$ でないとすると 証明 P で $T \vdash^{P} (\varphi \wedge \neg\varphi)$

となるような $\mathcal{L}$-文 φ があるから、$\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$

となるがこれは $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ の定義に矛盾である。

結論 T を Z の十分に大きな部分を含むような公理系とする。

T が無矛盾なら、$T \nvdash \exists \mathfrak{a} (\mathfrak{a} \models \ulcorner T \urcorner)$.

応用例 ZFC で議論する：

$\mathcal{H}(\aleph_0) = \{x : x \text{ は hereditarily finite}\}$

x is hereditarily finite $\Leftrightarrow$

$\exists y (x \subseteq y \wedge y \text{ is finite} \wedge y \text{ is transitive})$

$\exists n \exists f (f : n \xrightarrow{\text{onto}} y)$

$\forall u \forall v (u \in y \wedge v \in u \rightarrow v \in y)$

$ZFC_{fi} \vdash \exists x (x = \mathcal{H}(\aleph_0))$ である。

$ZFC_{fi} \vdash \langle \mathcal{H}(\aleph_0), \in \rangle \models ZFC - \text{Axiom of Infinity}$

$\omega \subseteq \mathcal{H}(\aleph_0)$ だが $\omega \notin \mathcal{H}(\aleph_0)$

したがって

$ZFC_{fi} \vdash \mathrm{Consis}(ZFC - \text{Axiom of Infinity})$

特に ZFC − Axiom of Infinity が無矛盾とすると、

[redacted]

ZFC − Axiom of Infinity から Axiom of Infinity は証明できない。

ZFCの中での議論をする：

整列順序　集合 X の上の二項関係

$R \subseteq X^2$ が半順序であるとは

(1) すべての $a, b, c \in X$ に対し aRb かつ bRc ならば aRc

(2) すべての $a \in X$ に対し $a \not R a$

このとき $\langle X, R \rangle$ は半順序集合であるという

$\langle a, b \rangle \in R$ を aRb と書く

($\langle a, b \rangle \in <$ と書かずに $a < b$ と書く)

$a \not R b \iff \langle a, b \rangle \notin R$

半順序集合 $\langle X, R \rangle$ が

(3) すべての $a, b \in X$ に対し、(a) $a = b$, (b) aRb, (c) bRa のどれかが成り立つ

とき $\langle X, R \rangle$ を全順序集合（線形順序集合）

とよぶ。$\underbrace{R \text{は} X \text{上の全順序（線形順序）であるという}}$ このとき

(a) (b) (c) は2つ以上同時に成り立つことはない

もし (a) と (b) が同時に成り立つなら aRa となり (2) に矛盾

もし (b) (c) が同時に成り立つなら (1) により aRa

となり、(2) に矛盾する etc.

R を X 上の線形順序として、

$a \in X$ が $A \subseteq X$ の最小元であるとは、

$a \in A$ で すべての $b \in A$ に対し、$b \not R a$

(つまり、$\underbrace{\text{すべての } b \in A \text{ に対し、} a = b \text{ または } aRb}_{(3)\text{により}}$)

R を X 上の線形順序として

(4) すべての $A \subseteq X$ に対し $A \neq \emptyset$ なる A の最小元が存在する

が成り立つとき、R は X 上の整列順序である（well-ordering）

という　このとき $\langle X, R \rangle$ は整列（順序）集合で

あるという（well-ordered set）

$\langle \omega, \in \rangle$ は整列順序集合である

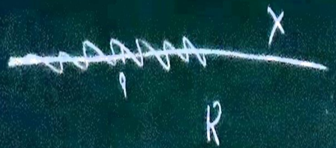
$\langle \underbrace{\omega \cup \{\omega\}}_{\omega+1}, \in \rangle$ も整列順序集合である？

0 1 2 ...

0 1 2 ...　ω

$\langle X, R\rangle$ が整列順序集合 (well-ordered set) であるとは、
R は X 上線形順序で、すべての空でない $S \subseteq X$ に対し S の R に関する最小元 ($b \in S$ ですべての $a \in S$ に対し aRb となるもの) が存在すること。

$\langle X, R\rangle$ が整列順序集合のとき $A \subseteq X$ が X の始片 (initial segment) であるとは、すべての $a \in A$ と bRa となる $b \in X$ に対して $b \in A$ となること



$a \in X$ に対し、

$$I_R(a) = \{b \in X : bRa\}$$

とする。$A \subseteq X$ が始片とは、$a \in A$ なら $I_R(a) \subseteq A$ となることである。

補題 1　$\langle X, R\rangle$ を整列順序とすると

(1) X の R に最小元が存在する。　$X \neq \emptyset$ なら

(2) $a \in X$ を X 最大元でないとするとき、a の R に関する次元が存在する。

(3) X の任意始片 A について $A \neq X$ なら $A = I_R(a)$ となる $a \in X$ が存在する。

(4) $A \subseteq X$ が上に有界なら (つまりある $b \in X$ があって任意の $c \in X$, bRc に対し、$c \notin A$) A 最小上界 $\sup A$ が存在する。

証明 (1)：$S = X$ とすると S の最小元が存在するからよい。

(2)：$S = \{b \in X \mid aRb\}$ を考えると仮定から $S \neq \emptyset$ なので S の最小元 b_0 が存在するが、aRb_0 ですべての bRb_0 に対して、aRb (つまり、$b = a$ または bRa じゃない)

(3)：A を X の始片で $A \neq X$ とすると $S = X \setminus A$ は空集合でないから、最小元 a を持つ。$I_R(a) = A$ である：bRa とすれば a の最小性から $b \in A$ である　つまり $\subseteq$ が成り立つ
$b \in A$ とっていれば aRb ではない (もしそうなら A は始片なので $a \in A$ となり a のとりかたに矛盾)
したがって $a = b$ または bRa だが、$a \notin A$ なので $a \neq b$ だから、bRa となっている。つまり $\supseteq$ が成り立つ。

(4)：$S = \{b \in X : b$ は A の上界 (i.e. ＿＿ の成り立つもの)$\}$ とおくと $S \neq \emptyset$　a を S の最小元とすると、$a = \sup A$ である。

⑥

(ii) $a\in S$ なので $b\in A$ に対し, $a \not R b$ である. 任意の bRa に対し, $b\in A$ または bRc となる $c\in A$ が存在する. もしそのような c が存在しなければ $b\in S$ となるが これは a の最小性に矛盾する.

補題2 (1) $A\subseteq X$ で

(*) すべての $a\in X$ に対し, $I_R(a)\subseteq A$ なら $a\in A$

となるなら, $A=X$

(2) $A\subseteq X$

(**) (a) X の最小元 $\in A$ (b) $a\in A$ で a は X の最大元でないなら a の次の元 $\in A$ (c) $B\subseteq A$ で B は X で有界なら $\sup(B)\in A$ が成り立つなら $A=X$

(3) Y を任意の集合として, $\mathbb{F}=\{f : f$ はある X の始切片から Y への関数$\}$

として, $g:\mathbb{F}\to Y$ とするとき 次を満たす

$f:X\to Y$ が一意に存在する: 任意の $a\in X$ に対し,

$$f(a)=g(\underbrace{f\upharpoonright I_R(a)}_{\in\mathbb{F}})$$

同様の補題が "集合的な 整列順序クラス" に成り立つので
(set-like)

この一般化の方の証明を以下で行う.

$\mathcal{X}$ をクラスとして, $\mathcal{R}$ を $\underbrace{\text{二項関係}}_{\mathcal{X}\text{上の}}$ クラスとする

つまり すべての $p\in\mathcal{R}$ に対し, $a,b\in\mathcal{X}$ で $p=\langle a,b\rangle$ となるものが存在する.

$\langle a,b\rangle\in\mathcal{R}$ を $a\mathcal{R}b$ と書く

$\mathcal{R}$ が $\mathcal{X}$ 上の整列順序であるとは,

$\langle a,b\rangle\notin\mathcal{R}$ を $a\not\mathcal{R}b$ と書く

(a) すべての $a,b,c\in\mathcal{X}$ に対して $a\mathcal{R}b$ かつ $b\mathcal{R}c$ なら $a\mathcal{R}c$ となる.

(b) すべての $a\in\mathcal{X}$ に対し, $a\not\mathcal{R}a$

(c) すべての $a,b\in\mathcal{X}$ に対し, $a=b$ または $a\mathcal{R}b$ または $b\mathcal{R}a$.

(d) すべての空でない集合 $A\subseteq\mathcal{X}$ に対し, A の $\mathcal{R}$ に関する最小元が存在する.

$a\in\mathcal{X}$ に対し, $I_{\mathcal{R}}(a)=\{b\in\mathcal{X}\mid b\mathcal{R}a\}$

と定義する. $I_{\mathcal{R}}(a)$ は一般には集合でないが

クラス $\mathcal{X}$ 上の整列順序 $\mathcal{R}$ が集合的 (set-like) であるとは,

(e) すべての $a\in\mathcal{X}$ $I_{\mathcal{R}}(a)$ は集合であること.

補題1' $\langle \mathcal{X}, \mathcal{R} \rangle$ を集合からなる整列順序クラスとするとき,

(1) $\underbrace{\mathcal{X}}_{\mathcal{X} \neq \emptyset \text{なら}}$ の $\mathcal{R}$ に関する最小元が存在する

(1.5) 任意の $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対し最小元が存在する

(2) $a \in \mathcal{X}$ を $\mathcal{R}$ に関する $\mathcal{X}$ の最大元でないものとすると a の次の $\underbrace{\text{元}}_{\in \mathcal{X}}$ が存在する

(3) $\mathcal{X}$ の任意の始片 $\mathcal{A}$ について, $\mathcal{A} \neq \mathcal{X}$ なら $\mathcal{A} = I_{\mathcal{R}}(a)$ となる $a \in \mathcal{X}$ が存在(する). 特に $\mathcal{A}$ は集合である.

(4) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ が上に有界なら, $\sup \mathcal{A}$ が存在する

証明 (1): $a \in \mathcal{X}$ とする a が $\mathcal{X}$ の最小元なら o.k. そうでなければ $I_{\mathcal{R}}(a)$ の最小元 a_0 がとれるが, a_0 は $\mathcal{X}$ の最小元でもある.

(1.5) $a \in \mathcal{A}$ とする a が $\mathcal{A}$ の最小元なら o.k. そうでなければ $I_{\mathcal{R}}(a) \cap \mathcal{A}$ の最小元 a_0 がとれるが a_0 は $\mathcal{A}$ の最小元でもある.

↑ 分離公理から集合である!

(2) $a \in \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の最大元でないとすると, $b \in \mathcal{X}$ で $a \mathcal{R} b$ となるものがとれる.

$A = \{ c \in I_{\mathcal{R}}(b) \mid a \mathcal{R} c \}$ の最小元 d をとると d は a の次の元になっている. 以下 (3) (4) は補題1と同様 □

補題2' $\mathcal{X}, \mathcal{R}$ を補題1'と同じようなものとするとき

(1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$

(*) すべての $a \in \mathcal{X}$ に対し $I_{\mathcal{R}}(a) \subseteq \mathcal{A}$ なら $a \in \mathcal{A}$

なら, $\mathcal{A} = \mathcal{X}$

(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$

(**) (a) $\mathcal{X}$ の最小元 $\in \mathcal{A}$ (b) $a \in \mathcal{A}$ で a は $\mathcal{X}$ の最大元でないとき a の次の元 $\in \mathcal{A}$ (c) 集合 $B \subseteq \mathcal{A}$ が上界を持つとき $\sup(B) \in \mathcal{A}$

なら, $\mathcal{A} = \mathcal{X}$

(3) 任意のクラス $\mathcal{Y}$ に対し,

$\mathbb{F} = \{ f : f \text{は} \mathcal{X} \text{の始片から} \mathcal{Y} \text{への関数} \}$

として $\mathcal{G} : \mathbb{F} \to \mathcal{Y}$ が与えられたとき,

次を満たすクラス関数 $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が1意に存在する:

$a \in \mathcal{X}$ に対し

$$\mathcal{F}(a) = \mathcal{G}\Big(\underbrace{\overbrace{\mathcal{F} \restriction \underbrace{I_{\mathcal{R}}(a)}_{\text{集合}}}^{\text{集合}}}_{\in \mathbb{F}} \Big)$$

補題1' $(\mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ を集合的な整列順序(クラス)とするとき、（集合の集まりの順序付けでもよい！）

(1) $\mathfrak{X} \neq \phi$ なら、$\mathfrak{X}$ の $\mathfrak{R}$ に関する最小元が存在する

(1.5) 任意の $\overset{\neq\phi}{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{X}$ に対し $\mathfrak{A}$ の最小元が存在する

(2) $\mathfrak{X}$ の任意の始切片 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{X}$ なら、$\mathfrak{A} = I_{\mathfrak{R}}(a)$ となる $a \in \mathfrak{X}$ が存在する。特に $\mathfrak{A}$ は集合である。

(3) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$ 上に有界なら $\sup \mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$ が存在する

補題2' $(\mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ を集合的な整列順序クラスとするとき、

(1) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$ に対し

(*) すべての $a \in \mathfrak{X}$ に対し $I_{\mathfrak{R}}(a) \subseteq \mathfrak{A}$ なら $a \in \mathfrak{A}$

が成り立つなら、$\mathfrak{A} = \mathfrak{X}$

(2) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$ に対し、

(**) (a) $\mathfrak{X}$ の最小元は $\mathfrak{A}$ の要素 (b) $a \in \mathfrak{A}$ で a は $\mathfrak{X}$ の最大元でないなら、$\mathfrak{X}$ で a の次の元はふたたび $\mathfrak{A}$ の元、

(c) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ が $\mathfrak{X}$ で上界を持つなら、$\sup(\mathfrak{B}) \in \mathfrak{A}$

なら、$\mathfrak{A} = \mathfrak{X}$ （特に集合！）

(3) $\mathbb{F} = \{ f : f$ は関数で $\mathrm{dom}(f)$ は $\mathfrak{X}$ の始切片 $\}$

補題1' から $\mathrm{dom}(f) \neq \mathfrak{X}$ なら $\mathrm{dom}(f) = I_{\mathfrak{R}}(a)$ という形をしている。

として、g を $\mathbb{F}$ 上のクラス関数とするとき、

$\mathfrak{X}$ 上のクラス関数 $\mathfrak{f}$ ですべての $a \in \mathfrak{X}$ に対し

(***) $\mathfrak{f}(a) = g(\mathfrak{f} \restriction I_{\mathfrak{R}}(a))$

が成り立つようなものが1意に存在する。

<u>証明</u> (1): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$ が (*) を満たすとする。

$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{X}$ とすると、$\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A} \neq \phi$ だから、補題1' (1.5) から $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}$ の $\mathfrak{R}$ に関する最小元 a が存在する。

a の最小性から $I_{\mathfrak{R}}(a) \subseteq \mathfrak{A}$ だから、(*) から、$a \in \mathfrak{A}$ となるがこれは a のとり方に矛盾。

(2): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$ が (**) を満たすとき、(*) を満たすことを示せばよい。

$a \in \mathfrak{A}$ とする。もし a が $\mathfrak{X}$ 最小元なら、$I_{\mathfrak{R}}(a) = \phi \subseteq \mathfrak{A}$ だが、

① (**)の(a)の仮定から、$a\in\mathcal{A}$ となればよい。

もし a が $\mathcal{X}$ の最小元でなければ、$I_R(a)\neq\phi$ でないが、$I_R(a)\subseteq\mathcal{A}$ として $a\in\mathcal{A}$ となることを示す：$I_R(a)$ が最大元 b を持つとき、このときには a は b の R に関する $\mathcal{X}$ での直後の元となっているので、(**)(b)から、$a\in\mathcal{A}$。

$I_R(a)$ が最大元を持たないなら、$a=\sup(I_R(a))$ となっているから、(**)(c)から $a\in\mathcal{A}$。

以上で $\mathcal{A}$ は(*)を満たすことが示せたので (1)から $\mathcal{A}=\mathcal{X}$。

(3): $\mathbb{F}_0 = \{ f\in\mathbb{F} :$ すべての $b\in dom(f)$ に対し、$f(b) = g(f\restriction I_R(b)) \}$

とする。

(#) $f\in\mathbb{F}_0$ で $b\in dom(f)$ なら、$I_R(b)\subseteq dom(f)$ となり

$f\restriction I_R(b)\in\mathbb{F}$ である。[$c\in I_R(b)$ (cRb) とすると、

$f\restriction I_R(b)(c) = f(c) = g(f\restriction I_R(c)) \underset{I_R(c)\subseteq I_R(b)}{=} g((f\restriction I_R(b))\restriction I_R(c))$.]

$\mathbb{F}_0\neq\phi$: a_0 を $\mathcal{X}$ の最小元とすると、$I_R(a_0)=\phi$ だが、

$\{\langle a_0, g(\phi)\rangle\}\in\mathbb{F}_0$

Claim 1 すべての $f, g\in\mathbb{F}_0$ は関数として共存する (compatible)

⊢ 一般性を失うことなく $dom(f)\subseteq dom(g)$ としてよい

もし f, g が共存しないなら $a\in dom(f)$ で $f(a)\neq g(a)$ となるものが存在するから、補題1' (1.5) からそのようなもののうちの最小元 a^* をとることができる。このとき a^* 最小性から

$f\restriction I_R(a^*) = g\restriction I_R(a^*)$ だから、

$f(a^*) = g(f\restriction I_R(a^*)) = g(g\restriction I_R(a^*))$

$= g(a^*)$ となり a^* のとり方に矛盾。⊣

Claim 2 $\mathcal{G}=\bigcup\mathbb{F}_0$ とすると $\mathcal{G}$ はクラス関数となり、$\mathcal{G}$ は(***)を満たし、$dom(\mathcal{G})=\mathcal{X}$

⊢ $\mathcal{G}$ がクラス関数になることは Claim 1 から明か：

$\langle x,y\rangle\in\mathcal{G} \iff$ ある $f\in\mathbb{F}_0$ に対し、$\langle x,y\rangle\in f$ (or $f(x)=y$)

$\overset{\text{Claim 1}}{\iff}$ すべての $f\in\mathbb{F}_0$ に対して、$x\in dom(f)$ なら $f(x)=y$

により $\langle x,y\rangle, \langle x,y'\rangle\in\mathcal{G}\Rightarrow y=y'$.

$\mathcal{G} \models (***)$ は、次のようにして分かる：

$\langle a, b \rangle \in \mathcal{G}$ とすると、ある $f \in \mathbb{F}_0$ に対して

$a \in \mathrm{dom}(f)$ で $f(a) = b$ である。 $f \subseteq \mathcal{G}$

だが、このとき $\underbrace{b}_{\mathcal{G}(a)} = g(\underbrace{f \restriction I_R(a)}_{= \mathcal{G} \restriction I_R(a)}) = g(\mathcal{G} \restriction I_R(a))$

$f \in \mathbb{F}_0$ により

$\mathrm{dom}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{X}$

$\mathrm{dom}(\mathcal{G}) = \mathcal{X}$ となることを示すために、$\mathrm{dom}(\mathcal{G})$ が $(**)$ を満たすことを示す。

$\mathrm{dom}(\mathcal{G}) \models (a)$ は $\mathbb{F}_0 \neq \emptyset$ の証明から。

(b)：$a \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$ が $\mathcal{X}$ の最大元でなかったとする

a の次の元を b とする

このときには $f \in \mathbb{F}_0$ $a \in \mathrm{dom}(f)$ が存在する。もし a が $\mathrm{dom}(f)$ の最大元でなかったときには $b \in \mathrm{dom}(f)$ だから $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$ である。a が $\mathrm{dom}(f)$ の最大元であるときは

$\tilde{f} = f \cup \{\langle b, g(f) \rangle\}$ とすると、

$\tilde{f} \in \mathbb{F}_0$ で $b \in \mathrm{dom}(\tilde{f})$ だから、$b \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$。

(c)：$B \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{G})$ で $\sup(B) \in \mathcal{X}$ が存在するなら；

$$\mathbb{F}_1 = \{ f \in \mathbb{F}_0 \mid \mathrm{dom}(f) \subseteq I_R(\sup(B)) \}$$

として、$f^* = \bigcup \mathbb{F}_1$ とすると $(*)$ から $B \subseteq \mathrm{dom}(f^*)$

$\mathcal{G}$ がクラス関数であることの証明と同様に f^* が関数になることが示せ $\mathrm{dom}(f^*) \subseteq I_R(\sup(B))$

しかも、

$\mathrm{dom}(f^*)$ は $\mathcal{X}$ の始片である。したがって

$\mathrm{dom}(f^*) = I_R(\sup(B))$ で、$f^* \in \mathbb{F}_0$ である。

$f^{**} = f^* \cup \{\langle \sup(B), g(f^*) \rangle\}$ とおくと、$f^{**} \in \mathbb{F}_0$ で $\sup(B) \in \mathrm{dom}(f^{**})$ だから、$\sup(B) \in \mathrm{dom}(\mathcal{G})$。

⊣

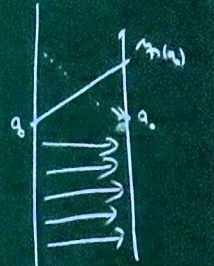
<u>一意性の証明</u>は Claim 1 と同様に証明できる。 ⊠

$(\mathcal{X}, R)$ を集合的な整列順序クラスとするとき、$\mathcal{X}$ 上の R に関する順序同型は $\mathcal{X}$ 上の identity map $id_{\mathcal{X}} = \{\langle x, x \rangle : x \in \mathcal{X}\}$ に限る。

<u>証明</u> $\mathcal{G} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を identity map でない $(\mathcal{X}, R)$ の R に関する順序同型だとして矛盾を示す。このときに $\mathcal{G}(a) \neq a$ となるような $a \in \mathcal{X}$ が存在するが 補題 1.1.5 により そのようなもののうちの最小のもの a_0 が存在する。

$\mathcal{G}(a_0) \notin I_R(a_0)$ である：$b \in I_R(a_0)$ なら a_0 の最小性から、$b = \mathcal{G}(b)$ である。$\mathcal{G}$ は 1-1 なので、$\mathcal{G}(a_0) \neq b$。

したがって $a_0 R \mathcal{G}(a_0)$ だが、このとき $\mathcal{G}(b) = a_0$ となるような b が存在しない。このような b は、$a_0 R b$ でなくてはならないが、これは $\mathcal{G}$ が順序を保存することに矛盾である。 ⊠



補題1

(1) $\langle X, R\rangle$ を整列順序集合として w.o.p.

$a \notin X$ とすると

$\langle X\cup\{a\},\ R\cup\{\langle x, a\rangle \mid x \in X\}\rangle$ 　 $\dfrac{\vec{R}}{X}$ 　a

は整列順序集合.

(2) $\langle X, R\rangle$ が w.o.p. のとき $Y\subseteq X$

$\langle Y, R\cap Y^2\rangle$ も w.o.p.

(3) $\langle I, \leq\rangle$ を全順序集合として,

各 $i\in I$ に対し $\langle X_i, R_i\rangle$ は w.o.p. で

$i\leq j$ なら, $^{(*)}X_i$ は X_j の始切片で $R_i = R_j \cap X_i^2$
R_j に関する

となるとき, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ 　$R = \bigcup_{i\in I} R_i$ とすると,

$\langle X, R\rangle$ は w.o.a.

証明 (1) (2) は明か.

(3) $\langle X, R\rangle$ は全順序 $x, y, z\in X$ 　$x\in X_i$ 　$y\in X_j$

$z\in X_k$ とする. $l\in I$ を i, j, k のうちの最大のものとすると

$x, y, z\in X_l$ である. xRy 　yRz なら,

$xR_l y$ かつ $xR_l y$ なので, R_l が全順序であることから,

$xR_l z$ となりしたがって xRz である. 同様にして R は

線型順序であることが示せる. $\phi\neq A\subseteq X$ とおくと,

ある $i\in I$ に対し $A\cap X_i \neq \phi$ となるが,

このとき R_i の整列性から $A\cap X_i$ は R_i に関する最小元 a を

持つが (*) により, a は X での A の最小元でもある. ☒

順序数 　整列順序に関する議論はすべて, ZF − AF

(AF : axiom of foundation 基礎の公理) で行えた. 関数再帰的定義

(の議論の1部) をのぞくと実は Z − AF で実行できた.

以下でもできるだけこれらの ZFC の subsystem の中で議論する.

X が推移的 (transitive) であるとは任意の $x\in X$ と $y\in x$ に対し

$y\in X$ となること. つまり任意の $x\in X$ に対し, $x\subseteq X$ となること

X が順序数 (ordinal) であるとは,

X は transitive で $\in$ が X 上の

整列順序となること. (つまり,

$R = \{\langle x, y\rangle \in X^2 \mid x\in y\}$ とするとき

$\langle X, R\rangle$ が w.o.p. となること). とする.

AF のもとでは, X が順序数 $\Leftrightarrow$ X は

transitive で $\in$ は X 上の線形順序.

On で順序数の全体のクラスをあらわす. On の要素は

ギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$

補題2 (0) $\phi\in On$

(1) $\alpha\in On$ なら $\alpha\notin\alpha$ である.

(2) $\alpha\in On$ なら, $\alpha\cup\{\alpha\}\in On$

(3) $\alpha \in On$ で $\beta \in \alpha$ なら $\beta \in On$

特に $\alpha \in On$ なら $\alpha = \{\beta \in On : \beta \in \alpha\}$

$= \{\beta \in \alpha : \beta \in On\}$ である.

(4) $\alpha \in On$ で $A \subseteq \alpha$ が α の $\in$ に関する始片なら ある $\beta \in On$ に対し, $A = \beta$ である.

(5) $\alpha \in On$ で $\beta, \beta_0 \in \alpha$ かつ β_0 は β の $\in$ に関する直前の要素なら, $\beta = \beta_0 \cup \{\beta_0\}$ である.

α で

(6) $\omega \subseteq On$, $\omega \in On$

~~(8) $X \subseteq On$ で X は集合なら $\bigcup X \in On$~~ 修正

証明 (1): もし $\alpha \in \alpha$ とすると $\{\alpha\} \subseteq \alpha$ で $\in$ に関する最小元を持たないから, $\alpha \in On$ に矛盾する.

(0): 明らか.

(2): $\alpha \cup \{\alpha\}$ が推移的なことは明らかだが 補題1(2)により $\in$ は $\alpha \cup \{\alpha\}$ 上の w.o. になっている.

(3): $\alpha \in On$ で $\beta \in \alpha$ とすると, (*) $\beta \subseteq \alpha$ となる.

β は推移的である: $\xi \in \beta$ $\eta \in \xi$ なら $\in$ が α 上の全順序であることから $\eta \in \beta$ となる.

$\xi \in \alpha$ $\eta \in \alpha$ だが

補題1 (2) により $\in$ は β 上の w.o. となる.

したがって $\beta \in On$.

(4): $A \subseteq \alpha$ が α の $\in$ に関する始片で $A \neq \alpha$ なら w.o. に関する補題より, $A = I_{\in}(\beta)$ となる $\beta \in \alpha$ が存在する. (3) から, $I^{\alpha}_{\in}(\beta) = \{\eta \in \alpha \mid \eta \in \beta\} = \{\eta \mid \eta \in \beta\} = \beta$ となる. $\beta \in On$ である.

(5): α, β, β_0 を上のようにとるとき $\beta_0 \in \beta$ で β のすべての要素は β_0 か $I^{\beta}_{\in}(\beta_0)$ の要素だから, $\beta = I^{\beta}_{\in}(\beta_0) \cup \{\beta_0\}$

$I^{\beta}_{\in}(\beta_0) = \beta_0$

$= \beta_0 \cup \{\beta_0\}$

$\alpha \in On$ のとき $\alpha \cup \{\alpha\}$ を $\alpha + 1$ とあらわす.

(6): $\omega \subseteq On$ はすでに示した. $n, m \in \omega$ に対しては $n \in m$ または $m = n$ または $m \in n$ が成り立つことが示せており, $n \in m$ なら n は m の始片なのだった. このことと補題1(3)から $\in$ は $\omega = \bigcup \omega$ 上の w.o. になることがわかる. したがって $\omega \in On$. //

定理3 (1) $\alpha, \beta \in On$ に対し $\alpha \in \beta$ または $\alpha = \beta$ または $\beta \in \alpha$ のいずれかが成り立つ.

ちょうど1つ

(2) On は推移的で $\in$ は On 上の集合的な整列順序(クラス)である.

証明 (1): 補題て, (4)により, α は β の始片になるか β は α の始片になるかのいずれかが成り立つことを示せばよい.

$A = \alpha \cap \beta$ とおくと A は α の始片で β の始片でもある.

[$\xi \in \alpha \cap \beta$ とおくと $\xi \subseteq \alpha$ かつ $\xi \subseteq \beta$ なので $\eta \in \xi$ なら $\eta \in \alpha \cap \beta$]

もし $A \neq \alpha$ $A \neq \beta$ なら, $\alpha' \in \alpha$ $\beta' \in \beta$ $A = I^{\alpha}_{\in}(\alpha')$ かつ

㋐ かつ $A = I_{\in}^{\beta}(\beta') = \beta'$

$\alpha' = \beta' \in \alpha \cap \beta$ となるが $\alpha' \notin A$

だから矛盾.

(2): $\alpha \in On$, $\beta \in \alpha$ なら 補題2,(3)により,

$\beta \in On$ だから On は推移的

$\in$ は On の要素上で推移的

$\alpha \in \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$

↑ $\in$ の γ 上推移性

$\alpha \notin \alpha$ 補題2,(1)

(1)の結果から $\in$ は On 上の線形狭義順序

$\in$ が On 上 整列順序も明らか

$A \subseteq On$ とすると ある $\gamma \in On$ に対して $A \cap \gamma \neq \emptyset$

から, $A \cap \gamma$ の γ で $\in$ に関する最小元 α

(ア) いえるが, α は β の真の始片 または $\alpha = \beta$

または β は α の真の始片 が成り立つ

$\Updownarrow$ $\alpha \in \beta$

$\Updownarrow$ $\beta \in \alpha$

trichotomy より

があるが, α は γ, On での最小元でもある. ∎

補題4 $X \subseteq On$ X は集合のとき $\bigcup X \in On$

で $\bigcup X$ は $\in$ に関する X の"極限".

証明

$\bigcup X$ は推移的 (演習)

$\in \cap (\bigcup X)^2$ は w.o. … ∎

↑ 定理3,(1) と 補題1,(3) によりよい.

$(O_n, \in)$ は集合ではないが $\in$ は O_n 上の整列順序となるので O_n 上の $\in$ に関する帰納法や再帰的定義が可能である。

Lemma 1 O_n は集合でない

$$\forall x\,(x \neq O_n)$$

証明 もし O_n が集合だとすると、$O_n \in O_n$ となるが、これは矛盾。■

Lemma 2 すべての集合的な整列順序つき集合 $(X, \sqsubseteq)$ に対して、O_n の始片 I があって $(I, \in) \cong (X, \sqsubseteq)$ となる。このとき $\underbrace{I = I_\in(\alpha^*)}_{\text{ある}\ \alpha^*\ \text{に対して}}$ か または $I = O_n$ なので

X は集合で[redacted], $\alpha^* \in O_n$ に対し ① $(\alpha^*, \in) \cong (X, \sqsubseteq)$ となるか または ② $(O_n, \in) \cong (X, \sqsubseteq)$ のどちらかである。

さらに ① の場合には、このような α^* は1意に決まる。

① のとき $otp(X, \sqsubseteq) = \alpha^*$ と定義する。

↑ order type

証明 $\mathcal{F} : O_n \to (X, \sqsubseteq)$ を次のように定義する。X の $\sqsubseteq$ に関する最小元を x_0 とする。

- $\mathcal{F}(\phi) = x_0$
- $\mathcal{F}\restriction\alpha$ が $\alpha (= I_\in(\alpha))$ と $(X, \sqsubseteq)$ のある真の始片 $I_\sqsubseteq(x)$ との間の同型写像になっているときには、$\mathcal{F}(\alpha) = x$ とする。
- それ以外のときには $\mathcal{F}(\alpha) = x_0$

このような $\mathcal{F}$ は以下のようにして 前に言った再帰的定義に関する定理 により とることができる：

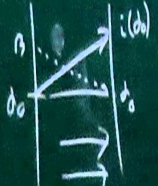
$\mathbb{F} = \{f : f$ はある $\alpha \in O_n$ 上の関数$\}$

$$\underbrace{g = \{\langle f, x\rangle}_{\in\, \mathbb{F} \times X} \mid \begin{array}{l} f = \phi \text{ かつ } x = x_0 \\ f \text{ は } dom(f) \text{ から } X \text{ の真の始片 } I_\sqsubseteq(x) \text{ への} \\ \in, \sqsubseteq \text{ に関する同形写像} \\ x = x_0 \text{ : それ以外のとき} \end{array} \}$$

とって、$\mathcal{F}(\alpha) = g(\mathcal{F}\restriction\alpha)$ がすべての $\alpha \in O_n$ に対し成り立つようにとればよい

場合1 ある $\alpha \neq 0$ において $F(\alpha) = x_0$ となるとき、
このときは、$\alpha^* = \min\{\alpha \in On \setminus \{0\} : F(\alpha) = x_0\}$
とすると、$F \upharpoonright \alpha^* : (\alpha^*, \in) \xrightarrow{\cong} (X, \sqsubseteq)$
である。このような α^* が存在しないならば、
$F : On \to X$ $\quad X' = \{F(\alpha) \mid \alpha \in On\}$
order preserving で $F : On \xrightarrow{\cong} X'$
$X' = X$ となる。そうでないとすると $x^* \in X \setminus X'$ がとれるが、$X' \subseteq I_{\sqsubseteq}(x^*)$ だが $F : On \xrightarrow{\cong} X'$
により X' は真のクラスだが、$\sqsubseteq$ が集合的であることに矛盾。したがって $F : (On, \in) \xrightarrow{\cong} (X, \sqsubseteq)$.

①の場合の α^* の一意性は、もし $\alpha^* < \alpha^{**}$ で
$(\alpha^*, \in) \cong (X, \sqsubseteq) \cong (\alpha^{**}, \in)$ とすると
$(\alpha^*, \in) \cong (\alpha^{**}, \in)$ となる $i : (\alpha^*, \in) \to (\alpha^{**}, \in)$
とあると、$\alpha_0 = \min\{\alpha \in \alpha^* \mid i(\alpha) \neq \alpha\}$ とすると、
$i(\alpha_0) > \alpha_0$ となるが このとき $i(\beta) = \alpha_0$ となるような β は



存在しない。これは矛盾。 ∎

順序数算術

$\alpha, \beta \in On$ に対し、

$\alpha + \beta = otp(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$ とする。

↑ lexicographical ordering

$\langle i, \xi \rangle \leq \langle j, \eta \rangle$

$\Leftrightarrow$ $i < j$ または

$i = j$ and $\xi < \eta$

$\alpha + \beta$ は各 α を固定したとき

レポートは
講義の web page に
今週末に post する。

$\alpha + 0 = \alpha$

$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$

$\alpha + \gamma = \sup_{\beta < \gamma} \alpha + \beta$ $\quad \gamma$ が limit のとき

として定義できる。

$\alpha \cdot \beta$ についても同様に導入できる。(演習)

累積的階層 (cumulative hierarchy) (Von Neumann)

$V(\cdot) : On \longrightarrow V$ を次で定義する

$V(0) = \emptyset$

$V(\alpha+1) = V(\alpha) \cup \mathcal{P}(V(\alpha))$

(実は $= \mathcal{P}(V(\alpha))$ としても同じ)

$V(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} V(\alpha)$ γ は limit.

Lemma 3 (1) $V(\alpha)$ は推移的

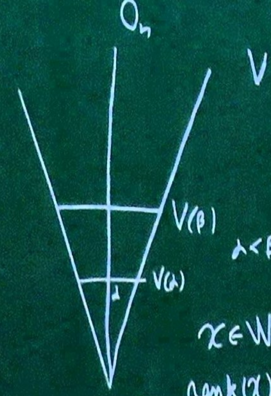
(2) $On \cap V(\alpha) = \alpha$ (3) $\alpha \leq \beta$ ならば $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$

証明 (1) α に関する帰納法で示せる.

(2) も α に関する帰納法で示せる. (演習).

(3): 各 α に対し、$\beta \in On$ $\alpha \leq \beta$ ならば $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ を β に関する帰納法で示す

⊠



$WF = \bigcup_{\alpha\in On} V(\alpha)$ とする

$x \in WF$ に対して

$rank(x) = \min\{\alpha : x \in V(\alpha+1)\}$

Lemma 4 (1) WF は transitive ($x \in WF \Rightarrow x \subseteq WF$).

(2) $x, y \in WF$ $x \in y$ ならば $rank(x) < rank(y)$.

(3) $x \in WF$ ならば任意の $A \subseteq x$ に対し、A の $\in$ に関する極小元が存在する

(WF の要素に対しては基礎の公理が成り立つ)

(4) x が集合で $x \subseteq WF$ ならば, $x \in WF$

(5) $V(\alpha+1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$

証明 (1): $x \in WF$ として, $\alpha = rank(x)$ とすると

$x \notin V(\alpha)$ で $x \in V(\alpha+1)$ なので $x \in \mathcal{P}(V(\alpha))$

したがって $x \subseteq V(\alpha) \subseteq WF$.

(2): $x, y \in WF$ $x \in y$ ならば, $\alpha = rank(y)$ とすると

$y \in \mathcal{P}(V(\alpha))$ $x \in y \subseteq V(\alpha)$ だから $x \in V(\alpha)$

$y \notin V(\alpha)$ だから, $rank(x) < \alpha = rank(y)$

(3): $x \in WF$ で $A \subseteq x$ とすると $A \subseteq WF$ なので A の要素の rank が考えられるが

$\alpha_0 = \min\{rank(a) : a \in A\}$ とすると

(2) により $rank(a_0) = \alpha_0$ となるような A の要素 a_0 は, は A の中で $\in$ に関し極小となることがわかる.

(4): $x \subseteq WF$ ならば. $\{rank(y) : y \in x\}$ は 集合となるので (が集合)

$\alpha^* = \sup\{rank(y) : y \in x\}$ とすると,

$x \subseteq V(\alpha^*+1)$ となることがわかる したがって

$x \in \mathcal{P}(V(\alpha^*+1)) \subseteq V(\alpha^*+2)$

(5): $\supseteq$ は明か $\subseteq$ には "$x \in V(\alpha)$ ならば $x \in \mathcal{P}(V(\alpha))$" を示せばよいが $y \in x$ ならば (2) により $rank(y) < rank(x)$ により, $y \in V(\beta+1) \subseteq V(\alpha)$ となる β がある したがって $x \subseteq V(\alpha)$. ∎

Thm 5

$\mathrm{Consis}(ZF-AF) \to \mathrm{Cons}(ZF)$

(メタ論理での証明) 特に ZF と

ZF−AF は equiconsistent

S をクラスとするとき $x\in S$ は ある

$\mathcal{L}_\in$ の論理式で $M(x)$ と書けるが, $\mathcal{L}_\in$ の

論理式 φ に対し, φ^S を次のように

帰納的に定義する

φ が 原子論理式のときは φ^S は φ とする

φ が $(\varphi_0 \vee \varphi_1)$ のとき φ^S は $(\varphi_0^S \vee \varphi_1^S)$

$\wedge$ $\rightarrow$ $\wedge$ $\rightarrow$

とする

φ が $(\neg\varphi_0)$ のとき φ^S $\neg\varphi_0^S$ とする.

φ が $\exists x\psi$ のとき, φ^S は

$\exists x(x\in S\wedge\psi^S)$ のこととする

φ が $\forall x\psi$ のとき φ^S は

$\forall x(x\in S\to\psi^S)$ のこととする

− $T\vdash\varphi$ なら, $\{\psi^S : \psi\in T\}\vdash\varphi^S$ となる

…

Thm 5の証明のスケッチ (AFも含む)

ZF−AFで議論する. φ を ZFの公理とすると

$ZF-AF\vdash\varphi^{WF}$ ($ZF-AF\vdash AF^{WF}$ は

補題4(3)から出る) もし, ZFが矛盾するとすると

ZFの有限個の公理 $\varphi_0,\dots,\varphi_k$ で

$\varphi_0 \dots \varphi_k \vdash 0\equiv 1$ $\quad (0\equiv 1^{WF} = 0\equiv 1)$

$\varphi_0^{WF}, \dots, \varphi_k^{WF} \vdash 0\equiv 1$ だが $ZF-AF\vdash\varphi_0^{WF}\dots\varphi_k^{WF}$

なので, $ZF-AF\vdash 0\equiv 1$. ⊠

定理6 $ZFC\vdash\mathrm{Consis}(\ulcorner Z\urcorner)$

証明のスケッチ $\langle V(\omega+\omega), \in\rangle\models\varphi$ for all $\varphi\in\ulcorner Z\urcorner$. ⊠

ZF は Z より consistency strength が真に大きい.

Thm 4.5 ZF−AF上で

AF は V = WF と

同値である

証明 ⇐): Lemma 4.(3)により

より.

⇒): AFが成り立つと仮定する.

$V\neq WF$ だったとして, $x\in V\setminus WF$

を $\in$ に関し極小になるようにとる

x の極小性 から

このとき すべての $u\in x$ に対し

$u\in V_\alpha$ となる $\alpha\in On$ が存在する

から, そのようなもののうち最小な

ものを α_u とすると

$\alpha^* = \sup\{\underbrace{\alpha_u}_{+1} : u\in x\}$ がとれる

$x\subseteq V_{\alpha^*}$ だから $x\in V_{\alpha^*+1}$

となるが これは $x\notin WF$ に矛盾 ⊠