$\kappa \in On$ が基数 (cardinal number) とは、すべての $\alpha < \kappa$ (つまり $\alpha \in \kappa$) に対して、α から κ への上射が存在しないこと。

定理 (ZF − AF) すべての $\alpha \in On \setminus \omega$ に対して $\alpha < \kappa$ となる基数が存在する。 $\alpha < \beta$

証明 $X = \{\beta \in On \mid \beta = otp(\alpha, R),\ R \subseteq \alpha^2\}$ は置換公理より集合。したがって $\gamma = \sup X \in On$

$f : \alpha \xrightarrow{onto} \gamma$ が存在したとすると、

$$S = \{ \min\{\beta \in \alpha \mid f(\beta) = \xi\} \mid \xi < \gamma \}$$

とすると $f \upharpoonright S : S \xrightarrow[onto]{1\text{-}1} \gamma$ なので

S 上の二項関係 R_0 を $\beta R_0 \beta'$:⟺ $f(\beta) < f(\beta')$ と定義

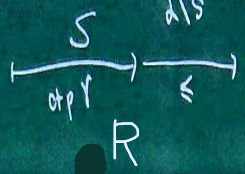
α 上の二項関係 R を $\xi, \xi' \in S$ で $\xi R_0 \xi'$ または $\xi \in S$ かつ $\xi' \in \alpha \setminus S$ または $\xi, \xi' \in \alpha \setminus S$ で $\xi < \xi'$ で定める

Remark (1) すべての $n \in \omega$ は基数

(2) ω は基数

証明 (1): $n \in \omega$ に対する帰納法ですべての $m < n$ に対し m から n への上射が存在しないことを示す。

(2): [redacted] $n \in \omega$ に対し n から ω への上射が存在したとするとこれから n から $n+1$ への上射が作れてしまい (1) に矛盾. ☒



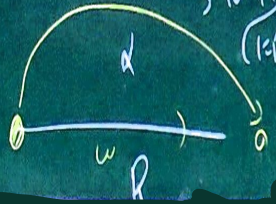
$otp(\alpha, R) \geq \gamma$ だから

$\gamma = \sup X \geq \gamma$

$\gamma + 1 \leq \sup X$:

α 上の二項関係 R^* を

$\xi R^* \xi'$:⟺ ξ は R に関する最小元でなく $\xi R \xi'$ となるか あるいは、ξ' は R に関する最小元



$\gamma \leq otp(\alpha, R) < otp(\alpha, R^*)$

γ を ☒

② したがって $f: \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{} \gamma$ は存在しない。

γ は基数である：$\beta < \gamma$ なら、ある $\beta^* \in X$ がとれて、$\beta \leq \beta^*$ となるが、X の定義から α から β^* への 1-1 onto 写像があるので α から β への上射が存在する。したがって β から γ への上射は存在しない。したがって γ は基数である。（しかも α と γ の間には基数が存在しない。）

このような α の次の基数を α^+ とあらわす。

$\mathrm{Card} = \{\kappa \in \mathrm{On} : \kappa \text{は基数}\}$ とすると

補題2 (1) Card は On で共終である (cofinal)

（つまりすべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $\kappa \in \mathrm{Card}$ で $\alpha < \kappa$ となるものがある。）

(2) $\alpha \in \mathrm{On}$ で $\mathrm{Card} \cap \alpha$ が α で共終なら（つまり任意の $\beta < \alpha$ に対し、$\kappa \in \mathrm{Card} \cap \alpha$ で $\beta < \kappa$ となるものが存在するなら）$\alpha \in \mathrm{Card}$ である。

（基数たちの極限は基数）

証明 (1) は定理からより

(2)：α が α より小さい基数たちの極限になっているとする。

もし α が基数でなかったとすると、ある $\beta < \alpha$ に対し $f: \beta \xrightarrow{\text{onto}} \alpha$ が存在する。このとき、（仮定から）$\beta < \kappa \in \mathrm{Card} \cap \alpha$ がある。ここで

$$f_0 : \beta \longrightarrow \kappa : \quad f_0(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & f(\gamma) < \kappa \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とおくと、f_0 は β から κ への上射となるがこれは $\kappa \in \mathrm{Card}$ に矛盾する。

したがって α は基数である。

$\aleph : (\mathrm{On}, \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Card} \setminus \omega, \in)$

が次のようにして定義できる。

$\aleph(0) = \omega$

$\aleph(\alpha+1) = \aleph(\alpha)^+$

補題2(2)から基数

$\aleph(\gamma) = \sup\{\aleph(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}$ γ が極限のとき。

$\aleph(\alpha)$ を $\aleph_\alpha$ とあらわす ($\aleph_0 = \omega$)

整礎関係 (well-founded relation)

集合 X 上の二項関係 R は

(*) $(\forall Y \subseteq X)\,(Y \neq \phi \to (\exists y \in Y)\underbrace{(\forall z \in Y)}_{(z \not R y)})$

を満たすとき 整礎的である という
(well-founded)

このような y を Y の R に関する 極小元 という.

クラス $\mathcal{X}$ に対し $\mathcal{X}$ 上の クラス二項関係 $\mathcal{R}$ が, 集合的 (set-like) とは すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し

$I_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid y \mathcal{R} x\}$ が 集合になること.

クラス $\mathcal{X}$ 上のクラス二項関係 $\mathcal{R}$ が 整礎的であるとは すべての集合 $y \subseteq \mathcal{X}$ について $y \neq \phi$ なら, y の $\mathcal{R}$ に関する極小元が 存在する.

補題3. $\mathcal{X}$ をクラスとして, $\mathcal{R}$ を $\mathcal{X}$ 上の $\underbrace{\text{クラス二項関係}}_{\text{整礎的な}}$ とする. このとき,

(1) すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し, $x \not\mathcal{R} x$

(2) $\mathcal{R}$ が集合的なら, 任意の空でないクラス $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ に対して, $\mathcal{Y}$ の極小元が存在する.

証明 (1): もし $x \mathcal{R} x$ なら $\{x\}$ は極小元を持たないので矛盾.

(2): 仮定により, $x \in \mathcal{Y}$ がとれる.

$I_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{Y} = \phi$ なら x は $\mathcal{Y}$ の $\mathcal{R}$ に関する極小元である.

そうでなければ $\underbrace{\underbrace{I^*_{\mathcal{R}}(x)}_{\text{集合}} \cap \mathcal{Y}}_{\text{集合}} \neq \phi$ は集合なので

$\underbrace{I^*_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{Y} \text{ の}}$ $\mathcal{R}$ に関する 極小元 y が存在する

y は $\mathcal{Y}$ の極小元でもある (もし $z \in \mathcal{Y}$ で $z \mathcal{R} y$ とすると, $y \in I^*_{\mathcal{R}}(x)$ だから $z \in I^*_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{Y}$ となり, y の極小性に矛盾する.

☒

各 $x \in \mathcal{X}$ に対して,

$I^n_{\mathcal{R}}(x)$, $n \in \omega$ を n に関する再帰で次のように

定義する: $I^0_{\mathcal{R}}(x) = I_{\mathcal{R}}(x)$

$I^{n+1}_{\mathcal{R}}(x) = \{z \in \mathcal{X} : z \mathcal{R} y \text{ for some } y \in I^n_{\mathcal{R}}(x)\}$

とする

$I^*_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup_{n \in \omega} I^n_{\mathcal{R}}(x)$ (集合)

とする このとき $y \in I^*_{\mathcal{R}}(x)$ で $z \mathcal{R} y$ なら

$z \in I^*_{\mathcal{R}}(x)$ [$y \in I^*_{\mathcal{R}}(x)$ なら ある $n \in \omega$ で $y \in I^n_{\mathcal{R}}(x)$ となるから $z \in I^{n+1}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq I^*_{\mathcal{R}}(x)$].