前回の
$I_R^n(x)$
$\mathrm{ext}_R^n(x)$

(X, R) が well-founded 整礎的 な 下集合的

クラスとすると $x \in X$

に対し、$\mathrm{ext}_R(x) = \{y \in X ; yRx\}$

(前回は $I_R(x)$ とおいた)

は集合である（「集合論」の演習）

十分大きな集合

$A \subseteq X$ に対し

$n \in \omega$ に対して、帰納的に

$$\mathrm{ext}_R^n(x) = \begin{cases} \{x\} & n=0 のとき \\ \bigcup\{\mathrm{ext}_R^{n-1}(y) ; y \in \mathrm{ext}_R(x)\} & n>0 のとき \end{cases}$$

おのおの $x \in A$ に ついて n に関する帰納法で定義

各 x の定義は 他の A に依存しないことを示しておかない。

と定義できる。R に関する x の transitive closure が推移的閉包

$$\mathrm{tcl}_R(x) = \bigcup\{\mathrm{ext}_R^n(x) \mid n \in \omega\}$$

$$\mathrm{tcl}_R^-(x) = \bigcup\{\mathrm{ext}_R^n(x) \mid n \in \omega \setminus 1\}$$

と定義できる。

$A \subseteq X$ が（R に関して）推移的とは、

$\forall x \in A\ \forall y \in X\ (yRx \to y \in X)$

となること。A が $\in$-推移的なとき、単に A は推移的であるという。

補題1 (X, R) が  なとき

(1) すべての $x \in X$ に対して

$\mathrm{tcl}_R(x)$ も $\mathrm{tcl}_R^-(x)$ も推移的である

(2) $\mathrm{tcl}_R(x)$ は x を要素として含む推移的な集合のうち $\subseteq$ に関して最小なものである

(3) $\mathrm{tcl}_R^-(x)$ は $\mathrm{ext}_R(x)$ を部分集合として含む推移的な集合のうち $\subseteq$ に関して最小なものである。(1)

(4) x は $\mathrm{tcl}_R(x)$ からも $\mathrm{tcl}_R^-(x)$ からも復元できるとは

すぐ分かる。

証明 (1)：$y \in \mathrm{tcl}_R(x)$ なら ある $n \in \omega$ に対し $y \in \mathrm{ext}_R^n(x)$ である したがって zRy なら、

$z \in \mathrm{ext}_R(y) \subseteq \mathrm{ext}_R^{n+1}(x) \subseteq \mathrm{tcl}_R(x)$ である。

$\mathrm{tcl}^-(x)$ についても同様

(2)：y を $x \in y$ で推移的なものとする。このとき n に関する帰納法で $\mathrm{ext}_R^n(x) \subseteq y$ がおのおの示せる したがって $\mathrm{tcl}_R(x) \subseteq y$ である

(3)：(2) と同様にできる。

(4): $\alpha_0, \alpha_1, \beta \in O_n$ で $\alpha_0 < \alpha_1 < \beta$ とすると

$\mathrm{tnd}_\in(\beta \setminus \alpha_0) = \beta = \mathrm{tnd}_\in(\beta \setminus \alpha_1)$, である. ☒

定理2 (整順集合上クラスでの帰納法と再帰法) $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ を整順的で集合的とする

(1) $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ が "すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し, $\mathrm{ext}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq \mathcal{Y}$ なら, $x \in \mathcal{Y}$ となる" を満たすとき, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$

(2) $\mathcal{F} = \{ f : f$ は関数で $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathcal{X}$ で (ある $x \in \mathcal{X}$ に対し) $\mathcal{R}$ は関し推移的 $\}$

このとき, g を $\mathcal{F} \times \mathcal{X}$ 上のクラス関数とするとき, $\mathcal{X}$ 上のクラス関数 $\mathcal{Y}$ で (すべての) $x \in \mathcal{X}$ に対し

$$\mathcal{Y}(x) = g(\mathcal{Y} \restriction \mathrm{tnd}_{\mathcal{R}}^{-}(x), x)$$

となるようなものが一意に存在する. 補題1,(4)

証明 (1): $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ とすると $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ の $\mathcal{R}$ に関する極小元が存在する (前回の定理). x_0 の極小性より, $\mathrm{ext}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq \mathcal{Y}$ となるが $\mathcal{Y}$ に対する仮定より $x \in \mathcal{Y}$ となり $\mathcal{X}$ とかちあう矛盾.

(2): 同様 (証明は整列順クラスに対する対応する定理の証明と同様.)

応用 (4) $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ を整順的で集合的なクラスとするとき, クラス関数

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{R}} : \mathcal{X} \longrightarrow O_n$$

を $\mathrm{rank}_{\mathcal{R}}(x) = \sup\{\mathrm{rank}_{\mathcal{R}}(y)+1 : y \in \mathrm{ext}_{\mathcal{R}}(x)\}$

として定義できる.

$g : \mathcal{F} \times \mathcal{X} \longrightarrow O_n$ を

$$g(f, x) = \begin{cases} \sup\{f(y)+1 : y \in \mathrm{ext}_{\mathcal{R}}(x)\} & \mathrm{dom}(f) = \mathrm{tnd}_{\mathcal{R}}^{-}(x) \text{ のとき } \mathrm{rang}(f) \subseteq O_n \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定理2(2)での $\mathcal{Y}$ を $\mathrm{rank}_{\mathcal{R}}$ とすると これが求めるものになっている.

応用(2)

定理3(集合版のモストフスキーの崩壊補題)

(X,E) を整礎的で外延的な関係とするとき推移的な集合 M と写像 c で

($\in$に関して)

$$c:(X,E)\xrightarrow{\cong}(M,\in)$$

(一意)

となるようなものが存在する.

定理4(クラス版のモストフスキーの崩壊補題)

$(\mathcal{X},\mathcal{E})$ を整礎的で外延的で集合からなるクラスとするとき, ある推移的なクラス $\mathcal{M}$ とクラス関数 $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}:(\mathcal{X},\mathcal{E})\xrightarrow{\cong}(\mathcal{M},\in)$$

となるものが存在する. (一意)

(X,E) が外延的とは

$(X,E)\models$ 外延公理 となること つまり,

すべての $x,y\in X$ に対し, $\mathrm{ext}_E(x)=\mathrm{ext}_E(y)$ なら $x=y$

$(\mathcal{X},\mathcal{E})$ が外延的も同様に.

すべての $x,y\in\mathcal{X}$ に対し, $\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)=\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(y)$ なら $x=y$

と定義する.

定理4の証明のスケッチ

$\mathcal{C}:\mathcal{X}\to V$ を

$$\mathcal{C}(x)=\{\mathcal{C}(y):y\in\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)\}$$ と定義する.

注意 $\mathcal{X}$ が推移的ならば $\in$ は $\mathcal{X}$ と外延的となる.

このとき,

$$\mathcal{M}=\mathcal{C}''\mathcal{X}=\{y\mid \text{ある } x\in\mathcal{X} \text{ に対し, } y=\mathcal{C}(x)\}$$

とすると,

$$\mathcal{C}:(\mathcal{X},\mathcal{E})\xrightarrow{\cong}(\mathcal{M},\in)$$

が示せる. このとき次を示せばよい:

① $\mathcal{M}$ は推移的

② $\mathcal{C}$ は 1-1 ($\mathcal{X}$ が外延的であることが用いられる)

③ $x,y\in\mathcal{X}$ に対し, $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \mathcal{C}(x)\in\mathcal{C}(y)$

(演習) ☒

補足(前の回の)

定理 $\mathbb{Z}F\setminus AF$ 上で以下は同値

(1) AF

(2) $V=\bigcup_{\alpha\in On}V(\alpha)$

証明 (2)$\Rightarrow$(1): $x\in V(\alpha)$ なら任意の $\emptyset\neq A\subseteq x$ に対し, A の要素で $\in$ に関して極小なものがある (α に関する帰納法で示せる) のでよい

(1)$\Rightarrow$(2): AF を仮定して $V\supsetneq\bigcup_{\alpha\in On}V(\alpha)$ とする. ここで $x\in V\setminus\bigcup_{\alpha\in On}V(\alpha)$ を $\in$ に関して極小のものとする. x 極小性から, $u\in x$ なら $u\in\bigcup_{\alpha\in On}V(\alpha)$ なので $u\in x$ に対し

$$\alpha_u=\min\{\alpha\in On\mid u\in V(\alpha)\}$$ とする

$\{ \alpha_u \mid u \in x \}$ は集合である

$\alpha^* = \sup\{ \alpha_u \mid u \in x \} \in O_n$

このとき α_u のとり方から

$x \subseteq V(\alpha^*)$ となるので

$x \in \mathcal{P}(V(\alpha^*)) \subseteq V(\alpha^*+1) \subseteq \bigcup_{\alpha \in O_n} V(\alpha)$

となるが これは x の選び方に矛盾. $\boxtimes$