基数算術 (cardinal arithmetic)

$\mathrm{Card} \subseteq \mathrm{Ord}$ (Z)

基数の全体 (cardinals)

$\omega = \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 \cdots$

$\mathrm{Card} \setminus \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ (ZF)

定理2 (ZFC) すべての集合 X に対し順序数 α が (少なくとも1つ) 存在する。

$f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} X$ となる f があるような

証明 $\varphi : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ を選択関数とする。

(つまり $\varphi(a) \in a$ がすべての $a \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に対し成り立つ)。このとき集合 ∞ を $\infty \notin X$ となるようなものとする。このとき $F : \mathrm{On} \to X \cup \{\infty\}$ を

$$F(\alpha) = \begin{cases} \varphi(X \setminus \mathrm{image}(F \restriction \alpha)) & X \setminus \mathrm{image}(F \restriction \alpha) \neq \emptyset \text{ のとき} \\ \infty & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

により定義する。

X は集合なのでこの集合は $\neq \emptyset$ (演習)

このとき $\alpha^* = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid F(\alpha) = \infty\}$

とすると、$F \restriction \alpha^*$ は 1-1 onto

$$F \restriction \alpha^* : \alpha^* \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} X.$$ ⊠

(ZFC ?) 各集合 X に対し、X の濃度 (cardinality) を

$$|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} : f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} X \text{ となる } f \text{ が存在する}\}$$

補題2 $|X| \in \mathrm{Card}$.

証明 もし $|X| \notin \mathrm{Card}$ とすると、$\alpha < |X|$ と $f : \alpha \xrightarrow{\text{onto}} |X|$ が存在する このとき $\alpha < |X|$ ので

$id_\alpha : \alpha \xrightarrow{1\text{-}1} |X|$ で

$g : |X| \longrightarrow \alpha$

を

$\kappa \in \mathrm{Ord}$ のとき

$\kappa \in \mathrm{Card} \Leftrightarrow$ すべての $\alpha < \kappa$ に対して $f : \alpha \xrightarrow{\text{onto}} \kappa$ となる f は存在しない。

(6月6日)

$g(\beta) = \min\{\xi < \alpha \mid f(\xi) = \beta\}$

$\neq \emptyset$

とすると g は 1-1

このことと次に示す Cantor-Bernstein の定理から、α から |X| への 1-1 onto mapping が存在することになり このことから α から X への 1-1 onto mapping が存在することになり |X| の minimality に矛盾。⊠

定理3 (Z) (Cantor-Bernstein) A と B を集合とする A から B への 1-1 mapping が存在し B から A への 1-1 mapping が存在するなら B から A への 1-1 onto mapping が存在する

証明 $g: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$ なので 一般性を失うことなく

A と $g''A$ を同一視して, $A \subseteq B$ で $g = id_A$

と思ってよい. $\underset{id_A}{g}: A \xrightarrow{\subseteq} B$ $h: B \xrightarrow{1\text{-}1} A$

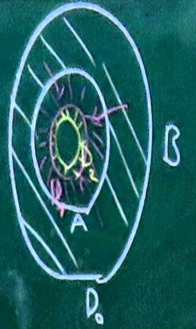
$B'' = h''B$ とおく. $B'' \subseteq A \subseteq B$ である.

$D_0 = B \setminus A$ $\quad D_1 = \underline{h''B \setminus A} \subseteq A$ $\quad (= h''B \setminus h''A)$

$D_{n+1} = h''D_n$ $\quad$ ただし $D_0 \cap D_1 = \emptyset$

$D_2 = h''D_1 \subseteq h''A$

$\cdots$



により, D_n $n \in \omega$ は互いに素である.

$f: B \to A$ を

$g \restriction A \setminus \bigcup_{n \geq 1} D_n$

$f = h \restriction \bigcup_{n\in\omega} D_n \cup id_{B \setminus \bigcup_{n\in\omega} D_n}$

とすると, $f: B \to A$ で 1-1 onto である. $\boxtimes$

$\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ に対し,

$\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$

$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$

$\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$

${}^X Y = \{f : f: X \to Y\}$

特に

$\lambda^2 = |{}^2\lambda|$

$= |\lambda \times \lambda| = \lambda \cdot \lambda$

$2^\lambda = |{}^\lambda 2| = |\mathcal{P}(\lambda)|$

定理4 (0) $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$, κ^λ

はどれも κ と λ に関して単調

(1) $\max\{\kappa, \lambda\} \geq \omega (= \aleph_0)$ ならば

$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$

(3) $\lambda \in \omega$ $\kappa \geq \omega$ ならば, $\kappa^\lambda = \kappa$

補題5 (1) $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ が存在するなら
$|X| \leqq |Y|$

(2) $f: X \xrightarrow[onto]{} Y$ が存在するなら $|X| \leqq |Y|$

証明 (1): もし $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ が存在するなら

φ 全単　ψ 全単
$|X|$　$|Y|$

とって、$\psi \cdot f \cdot \varphi : |X| \xrightarrow{1-1} |Y|$

このとき もし $|X| > |Y|$ なら、$|Y|$ から $|X|$ への 1-1 mapping が存在するので Cantor-Bernstein より、
$|X| \xrightarrow[onto]{1-1} |Y|$ となり、$|X| = |Y|$

となり矛盾。(2): 同様に $|X| \xrightarrow{onto} |Y|$ が存在すれば
$|Y| \in \mathrm{Card}$ より、$|Y| \leqq |X|$. ∎

$(\mathrm{On})^2$ 上の ordering $\sqsubset$ を次のように定義する。

$\langle \alpha, \beta \rangle \sqsubset \langle \alpha', \beta' \rangle \iff \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\alpha', \beta'\}$

または ($\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ かつ $\alpha < \alpha'$)

または ($\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ かつ $\alpha = \alpha'$ かつ $\beta < \beta'$)

補題6 $\sqsubset$ は On^2 上の集合的な整列順序である。

証明 集合的であることは $\langle \alpha, \beta \rangle \in (\mathrm{On})^2$　$\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$
とおくと $\underbrace{I_\sqsubset(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq (\gamma+1) \times (\gamma+1)}$ により
$I_\sqsubset(\langle \alpha, \beta \rangle)$ が集合となることからよい。

整列性は演習。∎

系 $\Phi : (\mathrm{On}, \in) \xrightarrow{\cong} ((\mathrm{On})^2, \sqsubset)$
となる Φ が存在する。

補題8 (1) すべての $n \in \omega$ に対し、$\Phi(n) \in I_\sqsubset(\langle 0, \omega \rangle)$

(2) すべての α に対し
$\Phi(\alpha) \sqsubseteq \langle 0, \alpha \rangle$

(3) すべての $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$ に対し、$\Phi(\kappa) = \langle 0, \kappa \rangle$ で

$\Phi'' \kappa = \kappa^2$

証明 (1): もし、$\langle 0, \omega \rangle \sqsubseteq \Phi(n)$ とすれば、
$I_\sqsubset(\langle 0, \omega \rangle)$ は無限集合なので、$I_\in(n)$ も無限となり矛盾

$(\langle 0, 0 \rangle\ \langle 1, 0 \rangle\ \langle 2, 0 \rangle \ldots \sqsubset \langle 0, \omega \rangle)$

(2): α に関する帰納法で示す ($\alpha < \beta \Rightarrow \langle 0, \alpha \rangle \sqsubset \langle 0, \beta \rangle$
によりよい。演習)

(3): (2) から、$\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し、

$\boxed{\Phi(\kappa) = \langle 0, \kappa \rangle}$ となることを
$\kappa \cdot \kappa = \kappa$

κ に関する帰納法で示す

$\kappa = \omega$ のとき、(2) から、

$\Phi(\omega) \sqsubseteq \langle 0, \omega \rangle$ だが

もし $\Phi(\omega) \sqsubset \langle 0, \omega \rangle$ と

すると、$\Phi(\omega) = \langle \overset{\in\omega}{n}, \overset{\in\omega}{m} \rangle$

だが、$I_\sqsubset(\langle n, m \rangle)$ は有限だから矛盾。

このとき、$I_\sqsubset(\langle 0, \omega \rangle) = \omega^2$ だから、

$\Phi(\omega) = \omega^2$ となる 特に $\Phi \restriction \omega \xrightarrow[onto]{1-1} \omega^2$ だから

$(\aleph_0)^2 = \aleph_0$. 残りは次回。