補題10 (1) $f(\alpha) \in \mathrm{Card}$

(2) $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$

証明 (1): もし $\mathrm{cf}(\alpha) \notin \mathrm{Card}$ でないとすると、

$\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ から上昇 $f: \beta \to \mathrm{cf}(\alpha)$ が

存在する $\beta^* = \min\{\beta' \leq \beta \mid \sup f''\beta' = \mathrm{cf}(\alpha)\}$

とする $\beta^* \leq \beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ だが

$f^*: \beta^* \to \mathrm{cf}(\alpha)$; $\xi \mapsto \sup f''\xi$ $< \mathrm{cf}(\alpha)$

とすると f^* は上昇列で $\sup f''\beta^* = \mathrm{cf}(\alpha)$

一方 上昇列 cofinal な $g: \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$

が存在するから、$g \circ f^*: \beta^* \longrightarrow \alpha$ は

上昇列で cofinal になるので これは $\mathrm{cf}(\alpha)$ の最小性

に矛盾。

(2): (1) と類似の議論で示せる。

基数 κ が $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ となるとき、κ を正則基数 (regular cardinal)

とよぶ 補題10により すべての $\mathrm{cf}(\alpha)$ は正則基数である

正則でない基数を特異基数 (singular cardinal) とよぶ

κ が singular $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$

$\kappa = \lambda^+$ とあらわせない基数を極限基数 (limit cardinal)

という。$\omega = \aleph_0$ $\aleph_\omega$ などは極限基数

である。$\kappa = \lambda^+$ とあらわせる基数を

非極限基数 (successor cardinal) という。

補題11 (1) ω は正則基数である。

(2) すべての非極限基数は正則基数である。

(3) "すべての極限基数は正則でない" は

ZFC と矛盾しない。

証明 (1): $n \in \omega$ に対して

$f: n \to \omega$ とすると、$f''n$ は有限で

かつ各 $i \in n$ に対し、$f(i)$ も有限だから、

$\bigcup f''n = \sup f''n$ も有限となりしたがって $< \omega$

このことから $\mathrm{cf}(\omega) \not< \omega$ (つまり $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$)

(2): $\kappa = \lambda^+$ とする $\beta < \kappa$ で $f: \beta \to \kappa$

とすると $f''\beta$ は、$|f''\beta| \leq |\beta| < |\kappa|$

したがって $|f''\beta| \leq \lambda$ また各 $\alpha \in f''\beta$ は $\alpha < \kappa$ だから

$|\alpha| \leq \lambda$ である。

(2) $\bigcup f''\beta = \sup f''\beta$ で補題3から

$$|\bigcup f''\beta| = \max\{\lambda, \lambda\} = \lambda < \kappa$$

だから $\bigcup f''\beta < \kappa$ である。

したがって $cf(\kappa) \neq \beta$ よって $cf(\kappa) = \kappa$ である。

(3): (スケッチ また やらない内容含む)

正則な極限基数 κ の存在が ZFC で示せたとすると、 $ZFC \vdash L_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner$

V_α と同様に L_α が次のように定義される:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup \{x \subseteq L_\alpha \mid \underbrace{x = \{a \in L_\alpha \mid L_\alpha \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\}}_{\text{ある論理式 } \varphi \text{ と } a_1, \dots, a_n \in L_\alpha \text{ に対して}}\}$$

$$L_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha$$

δ lim.t

が成り立ってしまうので不完全性定理により、ZFCの矛盾が証明できてしまう。 ☒

実際 $\aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+\omega} \quad \aleph_{\omega_1} \quad \dots$

$$\omega = cf(\aleph_\omega) < \aleph_\omega$$

$$\omega = cf(\aleph_{\omega+\omega}) < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+\omega}$$

$$\omega_1 = cf(\aleph_{\omega_1}) < \aleph_{\omega_1}$$

$$\omega_1 = \aleph_1$$

$$\boxed{\omega_1 = \aleph_1}$$

などすべて特異基数である!

$\alpha \in On$ と $f \in {}^\alpha Card \setminus 1$ とするこのとき

$$\prod f = \{h \in {}^\alpha Card \setminus 1 : h(\beta) < f(\beta) \text{ for all } \beta < \alpha\}$$

$$\dot{\sum} f = \{\langle \beta, \gamma \rangle \mid \beta < \alpha, \gamma < h(\beta)\}$$

$$\varphi : \dot{\sum} f \xrightarrow{1-1} \prod g$$

$$\langle \beta, \gamma \rangle \longmapsto \xi_{\beta\gamma}$$

$$\xi_{\beta\gamma} \in \prod g$$

$$\xi_{\beta\gamma}(\delta) = \begin{cases} \gamma & \delta = \beta \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

for all $\beta < \alpha$

$f(\beta) \leq g(\beta)$

を $f \leq g$ とおいておく。

補題12 $f, g \in {}^\alpha(Card \setminus 1)$ $f \leq g$ なら $|\dot{\sum} f| \leq |\prod g|$

定理 13 (König, 1904)

$f, g \in {}^{d}(\mathrm{Card} \setminus 1)$ $f < g$ のとき

$|\dot{\Sigma} f| < |\Pi g|$ である

証明 すべての $\varphi : \dot{\Sigma} f \to \Pi g$ が

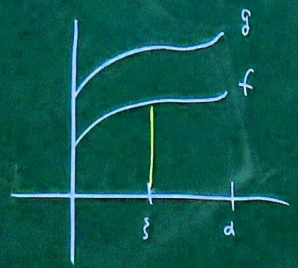
上射にならないことを示せばよい.

$h^* \in \Pi g$ を すべての $\xi \in \alpha$ に対し

$h^*(\xi) \in g(\xi) \setminus \{ h(\xi) \mid h \in \varphi'' \underbrace{\{\xi\} \times f(\xi)}_{\text{濃度 } f(\xi) < g(\xi)} \}$

となるように とる. このとき

$h^* \notin \varphi'' \dot{\Sigma} f$



$\{\xi\} \times f(\xi)$

ψ

$h \in \varphi'' \dot{\Sigma} f$ とすると $h = \varphi(\langle \xi, \eta \rangle)$ となるが

$h(\xi) \neq h^*(\xi)$ だから $h \neq h^*$.

□

系 14 すべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ $\kappa < 2^{\kappa}$

証明 $f : \kappa \to (\mathrm{Card} \setminus 1) ; \alpha \mapsto 1$

$g : \kappa \to (\mathrm{Card} \setminus 1) ; \alpha \mapsto 2$

このとき $f < g$ だから 定理から $|\dot{\Sigma} f| < |\Pi g|$

だが $\dot{\Sigma} f = \{ \langle \alpha, 0 \rangle \mid \alpha \in \kappa \}$ κ $\quad$ $\Pi g = \kappa_2$ $\quad$ 2^{κ}

だから $|\dot{\Sigma} f| = \kappa$

だから $|\Pi g| = 2^{\kappa}$

したがって $\kappa < 2^{\kappa}$.

系 15 すべての $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus 2$ と $\lambda \in \mathrm{Card} \setminus \omega$ に対し

$\mathrm{cf}(\kappa^{\lambda}) > \lambda$

証明

すべての $f : \lambda \to \kappa^{\lambda}$ に対し,

$\left| \bigcup \underbrace{f''\lambda}_{\operatorname{rng} f''\lambda} \right| < \kappa^{\lambda}$

$f : \lambda \to \kappa^{\lambda} \setminus 1$ としておく

このような f に対し,

$f^* : \lambda \to \mathrm{Card} \setminus 1 ; \alpha \mapsto |f(\alpha)|$ $\quad$ $\leq \kappa^{\lambda}$

$g : \lambda \to \mathrm{Card} \setminus 1 ; \alpha \mapsto \kappa^{\lambda}$

とおく このとき $f^* < g$ なので 定理から,

$|\dot{\Sigma} f^*| < |\Pi g|$

$$|\bigcup f''\lambda| \le |\sum f''\lambda| < |\prod \lambda|$$

$$\| \quad$$

$$|\bigcup f''\lambda| = |\lambda(2^\lambda)| = |\lambda(\lambda_2)| = |\lambda \times \lambda_2| = |\lambda_2| = 2^\lambda$$

□

特に $cf(2^\kappa) > \kappa$ がすべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ は

$$cf(2^\kappa) = cf|\mathcal{P}(\kappa)|$$

このことから $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

がわかる.

推移的な $\in$-構造上の絶対性とそのモデル

集合 M が推移的とは, $x \in M$ $y \in x$ なら $y \in M$ となることだった.

集合 M に対し, $E_M = \{\langle x, y\rangle \in M^2 : x \in y\}$ を考えて $\mathcal{L}_\in$-構造 $\langle M, E_M\rangle$ を考える

$\langle M, E_M\rangle$ を $\langle M, \in\rangle$ とも書き,

M 上の $\in$-構造とよぶ. さらに $\in$ をおいて

M で $\in$-構造 $\langle M, E_M\rangle$ をあらわすことも多い

補題1 (ZF) $\langle M, \in\rangle \models$ 外延性の公理

のときには, 推移的な N で

$$\varphi : \langle M, E_M\rangle \xrightarrow{\cong} \langle N, E_N\rangle$$

となるものがある. (Mostowski の崩壊定理)

したがって同型をのぞいて考えてよいときには $\in$-構造を考えるとき, それは推移的と思ってよい.