

5月24日の講義時間に以下の問題についての演習を行いません。(最低でも, 1. から 4. までの) 問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめて 5月31日の 講義の初め に提出してください。

ただし, 解答は, 結果を得るための計算過程, 思考過程が分かるような書き方を工夫してください。結果だけが書かれていて, それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません。

この演習の問題用紙と解説/解答例は,

<http://fuchino.udo.jp/kobe/biseki-2-ss16-uebung1-ex.pdf>

としてダウンロードできます。

1. 次の不定積分の計算をしてください:

$$(1) \int (4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x - 8) dx \quad (2) \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (3) \int \sin \left(\frac{4}{3}x \right) dx$$

$$(4) \int x \sin x dx \quad (5) \int \sin x \cos x dx \quad (6) \int \frac{1}{(3+5x)^2} dx \quad (7) \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$(8) \int \frac{6x-9}{x^2-3x+4} dx \quad (9) \int \frac{x^3-5x^2+4x+1}{x^2-5x+6} dx \quad (10) \int \sin^2 x dx$$

2. 次の等式が正しいことを確かめてください:

$$(1) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (\text{ただし } a > 0)$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log(\sqrt{x^2+1} + x) + C$$

$$(4) \int \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log(\sqrt{x^2+1} + x)) + C$$

3. (1) 次の議論は間違っています。どこが間違っているのかを指摘してください:

$\frac{1}{x^2}$ の原始関数は $-\frac{1}{x}$ だから, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2$. $\frac{1}{x^2}$ のグラフは $x=0$ を中心

として対称だから, $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -1$ である.

(2) 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ を計算してください.

4. 次の広義積分を計算してください: $\int_0^1 \log x dx$

5. (1) すべての $\beta > -1$ に対し, $x^\beta e^{-x} \leq \frac{C}{x^2}$ がすべての $x \geq 1$ に対して成り立つような, 定数 $C > 0$ がとれることを示してください.

(2) (1) と, 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ が収束すること (5月10日の講義でやっています) を用いて, すべての $\alpha > 0$ に対し, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ が収束することを示してください.

($\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \mapsto \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ はガンマ関数と呼ばれ, 色々なところに出てくる重要な関数です.)

6. (1) すべての $a > 1$ に対し, $\int_1^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx$ が成り立つことを示して, このことから $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束することを示せ (実は, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ となることが知られています).

(2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ となることを用いて, $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散することを示してください.

解説 / 解答例

— 現在まだ作成中です。誤植，計算間違い等を見つけたときにはぜひお知らせください。「解説 / 解答例」と書きましたが、受講者はここで説明したような内容を自分の言葉（熟慮して言葉を選んで，という意味で，舌足らずの表現で，という意味ではない）で説明できることが期待されています。

1.

$$(5): \int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \int t dt \Big|_{t=\sin x} = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

(講義での置換積分の最初のパターンによる)

$$(6): t = 3 + 5x \text{ とおくと, } x = \frac{t-3}{5} \text{ だから, } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} \text{ である. したがって, 置換積分法}$$

(講義での置換積分の二番目のパターン) から,

$$\int \frac{1}{(3+5x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \frac{dx}{dt} dt \Big|_{t=3+5x} = \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot t^{-1} \Big|_{t=3+5x} = -\frac{1}{5(3+5x)} + C.$$

$$(8): (x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3 \text{ なので, } \int \frac{6x-9}{x^2-3x+4} dx = \int \frac{3(x^2-3x+4)'}{x^2-3x+4} dx = 3 \log(x^2 - 3x + 4) + C.$$

$$(9): \frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 5x + 6} = x + \frac{-2x + 1}{x^2 - 5x + 6} = x + \frac{-5}{x-3} + \frac{3}{x-2} \text{ なので, } \int \frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(x + \frac{-5}{x-3} + \frac{3}{x-2} \right) dx = \int x dx + \int \frac{-5}{x-3} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 5 \log|x-3| + 3 \log|x-2| + C$$

$$(10): \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ を用いる.}$$

2. 右辺関数の微分が左辺に現れる被積分関数になっていることを確かめればよい.

3. (1) $\frac{1}{x^2}$ は 0 で定義されておらず, 0 で連続関数となるように拡張することもできない. したがって 0 を含む区間 $[-1, 1]$ でのこの関数の定積分がうまく定義できていることの保証は別途必要だし, 定積分がうまく定義されたとしても原始関数の端点での値の差で表わされるという保証はない.

$$(2) \text{ 広義積分は } \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +0} \left[-\frac{1}{x} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow +0} \left(-1 - \left(-\frac{1}{t} \right) \right) = \infty.$$

4. $\log x$ の定義域は $(0, \infty)$ で $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$ だから, この積分は広義積分である. $\int \log x dx =$

$$\int x' \log x dx = x \log x - \int \frac{x}{x} dx = x \log x - x + C$$

$$\text{だから, } \int_0^1 \log x dx = \lim_{t \rightarrow +0} [x \log x - x]_t^1 = 1 \cdot \log 1 - 1 - \left(\lim_{t \rightarrow +0} t \log t - 0 \right)$$

$$\text{だが, } \lim_{t \rightarrow +0} t \log t = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\log \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\log t)'}{t'} = - \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t}}{\lim_{t \rightarrow +\infty} 1} = 0$$

で $\log 1 = 0$ だから,

$$\int_0^1 \log x dx = -1 \text{ である.}$$

5. (1): $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{\beta+2}} = \infty$ だから (これは L'Hôpital の定理の繰り返し適用で示せる),
ある $a \geq 1$ に対し, すべての $x \geq a$ に対し, $x^\beta e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$ が成り立つ. $\{x^\beta e^{-x} : 1 \leq x \leq a\}$
は有界だから (連続関数の閉区間上の値の全体は常に有界である),
 $C = \max\{1, \sup\{x^\beta e^{-x} : 1 \leq x \leq a\} \cdot a^2\}$ とすれば, この C が求めるようなものになる.

(2): $\int_0^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ で, $\alpha > 1$ に対し, $x^{\alpha-1} e^{-x} > 0$ だか
ら, $\int_1^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ は t の関数として単調増加である. したがって, この関数が上に有界であ
ることを示せばよい.

(1) から, すべての $x \geq 1$ に対し, $x^{\alpha-1} e^{-x} \leq \frac{C}{x^2}$ が成り立つような $C > 0$ がとれるから,

$$\int_1^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx \leq \int_1^t \frac{C}{x^2} dx = C \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \leq C \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

である.

6. (1): 任意の $a > 1$ に対し, $\int_1^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx$ となることは部分積分法
による計算で確かめられる. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ だから, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$
と $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ とが存在することを確かめればよい.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ のとき;} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると, $\frac{\sin x}{x}$ は \mathbb{R} 上の連続関数 $f(x)$ に拡張されるから, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +0} \int_0^1 f(x) dx =$

$\int_0^1 f(x) dx$ となり, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ は有限の値となることがわかる.

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が有限の値となることを見るためには, $\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^a = \frac{\cos 1}{1}$ だから, 最初の

等式から, $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx$ が有限の値に収束することを示せばよい.

このためには, 5月10日の講義で示したように, $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ が有限の値に収束するこ

とを言えばよい. このことは, $\int_1^a \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ は a の関数として単調増加で, $\int_1^a \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq$

$\int_1^a \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$ であることから導かれる.

(2): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)}, & \text{ある } n = 0, 1, 2, \dots \text{ に対し, } x \in \left[\frac{1}{4}\pi + n\pi, \frac{3}{4}\pi + n\pi \right] \text{ のとき;} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とすると, すべての $x > 0$ に対し, $f(x) \leq \frac{\sin x}{x}$ が成り立つから,

$$\infty = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} \pi = \int_0^\infty f(x) dx \leq \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

である.

6.(1) の議論でもこの事実を用いたが、5月1日の講義でも述べたように、任意の関数 f に対し、 $\int_a^\infty |f(x)| dx$ が収束する ($f(x)$ の積分が絶対収束する) なら、 $f(x)$ の積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ も収束する。6.(1), 6.(2) は、 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ は、この主張の逆が必ずしも成り立たないことの例となっていることを示している。