

5月24日の講義時間に以下の問題についての演習を行ないます, (最低でも, 1. から 4. までの) 問題と解答を A4の紙 にレポートとしてまとめて5月31日の 講義の初め に提出してください.

ただし, 解答は, 結果を得るための計算過程, 思考過程が分るような書き方を工夫してください. 結果だけが書かれていて, それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません.

この演習の問題用紙は,

<http://fuchino. ddo. jp/kobe/biseki-2-ss16-uebung1. pdf>

としてダウンロードできます.

1. 次の不定積分の計算をしてください:

$$(1) \int (4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x - 8) dx \quad (2) \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (3) \int \sin \left(\frac{4}{3}x \right) dx$$

$$(4) \int x \sin x dx \quad (5) \int \sin x \cos x dx \quad (6) \int \frac{1}{(3+5x)^2} dx \quad (7) \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$(8) \int \frac{6x-9}{x^2-3x+4} dx \quad (9) \int \frac{x^3-5x^2+4x+1}{x^2-5x+6} dx \quad (10) \int \sin^2 x dx$$

2. 次の等式が正しいことを確かめてください:

$$(1) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log(\sqrt{x^2+1} + x) + C$$

$$(4) \int \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log(\sqrt{x^2+1} + x)) + C$$

3. (1) 次の議論は間違っています. どこが間違っているのかを指摘してください:

$\frac{1}{x^2}$ の原始関数は $-\frac{1}{x}$ だから, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2$. $\frac{1}{x^2}$ のグラフは $x=0$ を中心として対称だから, $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -1$ である.

(2) 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^2}$ を計算してください.

4. 次の広義積分を計算してください: $\int_0^1 \log x dx$

5. (1) すべての $\beta > -1$ に対し, $x^\beta e^{-x} \leq \frac{C}{x^2}$ がすべての $x \geq 1$ に対して成り立つような, 定数 $C > 0$ がとれることを示してください.

(2) (1) と, 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ が収束すること (5月10日の講義でやっています) を用いて, すべての $\alpha > 0$ に対し, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ が収束することを示してください.

($\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \mapsto \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ はガンマ関数と呼ばれ, 色々なところに出てくる重要な関数です.)

6. (1) すべての $a > 1$ に対し, $\int_1^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx$ が成り立つことを示して, このことから $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束することを示せ (実は, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ となることが知られています).

(2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ となることを用いて, $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散することを示してください.